Une autre approche de la relativité

Une autre approche de la relativité 26/11/2024

Pascal DUBOIS

Mots-clés : relativité restreinte ; relativité générale ; gravitation ; champ gravitationnel ; énergie ; masse ; équivalence ; énergie totale ; invariance ; horloge ; synchronisation ; vitesse limite ; dilatation du temps ; photon ; fréquence ; décalage spectral ; courbure ; Mercure ; Einstein ; métrique de Schwarzschild ; Pound et Rebka ; Shapiro.

1. Introduction et résumé

Dans la théorie de la relativité restreinte, le principe de relativité (invariance des lois de la physique par changement de référentiel galiléen) et l'universalité de la vitesse de la lumière (indépendance par rapport au référentiel et à la vitesse de la source) impliquent que les horloges de deux référentiels en mouvement relatif apparaissent désynchronisées. Hormis cette désynchronisation, les équations de changement de coordonnées (formules de Lorentz) font apparaître une dilatation des durées et une contraction des distances d'un référentiel à l'autre.

Plusieurs phénomènes physiques, comme le retard des horloges en mouvement ou l'augmentation de la durée de vie des muons atmosphériques par rapport à celle des muons au repos, sont en accord avec les prédictions de la théorie et donnent une réalité à la dilatation du temps, selon l'interprétation communément admise. Il est sous-entendu que l'on admet que les systèmes considérés ne sont pas affectés par leur mouvement rectiligne et uniforme : notamment, les horloges continuent à délivrer la même unité de temps.

De notre point de vue, ce phénomène de dilatation du temps constitue un véritable point de contradiction, puisque les observateurs d'un référentiel sont fondés à soutenir que le temps s'écoule réellement plus lentement dans tout référentiel en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à leur propre référentiel.

De son côté, la théorie de la relativité générale fait appel à une courbure de l'espace-temps, produite par la distribution de l'énergie, pour rendre compte de la gravitation. Elle explique ainsi complètement des phénomènes tels que l'avance du périhélie de Mercure ou la courbure des rayons lumineux proches du soleil, observable lors d'éclipses.

Le point de départ de cette note est la recherche d'une réponse à la question suivante : **sans mettre en cause le principe de relativité, est-il possible de bâtir une théorie alternative non contradictoire n'impliquant pas de déformations de l'espace et du temps ?**

Après un rappel concernant la synchronisation des horloges dans les référentiels galiléens et l'établissement des équations de changement de coordonnées entre référentiels dans le cadre de la relativité restreinte, nous nous interrogeons sur la notion d'événement et nous proposons une analyse alternative qui s'accorde avec une absence de dilatation de l'espace et du temps. Le changement de coordonnées n'est plus biunivoque.

A partir du principe d'équivalence entre masse et énergie et de la loi fondamentale de la dynamique (relativiste), nous proposons une deuxième analyse qui conforte la précédente. Elle nous conduit à une interrogation sur le principe d'invariance de la masse au repos, qui est admis dans la théorie de la relativité restreinte comme en Mécanique classique. Nous présentons une alternative à ce principe : l'énergie communiquée à une particule (dans un référentiel donné) pour la mettre en mouvement est conservée dans le référentiel où cette particule est au repos. L'invariant n'est plus la masse au repos, mais l'énergie totale de la particule. Cette hypothèse s'accorde avec l'absence de dilatation de l'espace et du temps.

Les phénomènes évoqués plus haut apparaissent alors comme la conséquence, non de la dilatation du temps, mais de la variation de l'énergie au repos d'un référentiel à un autre. Les atomes de l'horloge mise en mouvement ayant une énergie plus grande que ceux de l'horloge restée fixe, ces deux horloges ne délivrent plus la même unité de temps[1].

Un chapitre est consacré à la prise en compte des phénomènes lumineux, en comparant la nouvelle approche que nous proposons à celle de la relativité restreinte.

L'hypothèse de non-invariance de la masse au repos conduit naturellement à envisager que la gravitation puisse avoir une influence sur celle-ci : le décalage gravitationnel des horloges est interprété comme une conséquence de la variation de l'énergie au repos des atomes en fonction de leur distance à la source gravitationnelle. Ceci implique que l'on ne peut pas considérer qu'il y a équivalence complète entre gravitation et accélération.

Nous montrons que cette hypothèse permet, dans le cas des champs gravitationnels faibles, de formuler des lois simples en restant dans le cadre de la dynamique sans déformation de l'espace-temps :

- la variation de l'énergie potentielle d'une particule, de masse nulle ou non nulle, est proportionnelle à l'énergie totale de celle-ci ;
- la variation d'énergie totale d'une particule est égale à l'opposé de la variation d'énergie potentielle majorée du travail des forces extérieures s'il y a lieu ;
- l'énergie au repos d'une particule de masse non nulle varie avec sa distance à la source. En l'absence de forces extérieures, la variation d'énergie associée à l'énergie au repos et la variation d'énergie associée à la quantité de mouvement sont chacune égale et opposée à la moitié de la variation de l'énergie potentielle ;

[1] tout au moins pour une horloge atomique

- la loi fondamentale de la dynamique est applicable pour déterminer la relation entre la variation de la quantité de mouvement d'une particule de masse non nulle et la variation d'énergie correspondante sous l'effet du champ gravitationnel ;

- les particules de masse nulle sont ralenties dans la traversée du champ gravitationnel.

Avec ces lois, les phénomènes physiques ayant fait l'objet de vérifications expérimentales sont correctement expliqués, y compris l'effet Shapiro. Une différence avec la théorie de la relativité générale apparaît en ce qui concerne l'évaluation du décalage spectral gravitationnel, mais le résultat de l'expérience de Pound et Rebka reste expliqué.

En conclusion, la note donne l'explication des similitudes et différences constatées par rapport à la théorie de la relativité générale en faisant référence à la métrique de Schwarzschild.

Une conclusion, valable pour la relativité restreinte comme pour la relativité générale, pourrait être la suivante : le postulat d'invariance de la masse au repos oblige, dans ces théories, à déformer l'espace et le temps pour simuler l'invariance d'énergie totale prise en compte dans la nouvelle approche proposée.

Un modèle de champ gravitationnel justifiant les lois proposées pour la gravitation en champ faible est présenté dans une note distincte intitulée « Champ gravitationnel, Principe fondamental de la Dynamique et Mécanique quantique ». Ce modèle permet aussi de prendre en compte un problème qui n'est pas limité à deux corps et d'envisager une extension des lois en dehors du champ faible.

Il reste bien sûr une question fondamentale qui peut mettre en cause nos représentations actuelles de la matière et de l'énergie : puisque l'on admet que des particules de même type peuvent avoir une énergie au repos différente, à quoi correspond physiquement cette différence d'énergie ?

2. *Référentiels galiléens et changement de référentiel*

2.1. Rappel des propriétés des référentiels galiléens

Un observateur a conscience de l'espace qui l'environne et du temps qui s'écoule. Il peut situer un événement_ c'est-à-dire un phénomène[2] physique se produisant en un point de l'espace_ dans un référentiel qui lui est propre :

- d'une part, spatialement dans un repère donnant les coordonnées d'espace grâce à des graduations basées sur un étalon de longueur ;
- d'autre part, dans le temps grâce à des horloges[3] placées en tout point du repère, délivrant une unité de temps identique à celle d'une horloge- étalon ;

Les référentiels galiléens sont ceux dans lesquels l'espace apparaît homogène et isotrope et le temps uniforme vis-à-vis des phénomènes physiques, ce qui veut dire que ces phénomènes sont inchangés par les opérations de translation dans l'espace, rotation dans l'espace et translation dans le temps. Tous les observateurs d'un tel repère sont équivalents.

La définition même des référentiels galiléens impose que deux référentiels galiléens en mouvement relatif sont nécessairement en mouvement de translation spatiale rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre.

Si l'on n'utilise qu'un seul référentiel, l'étalon de longueur et l'étalon de temps peuvent être choisis arbitrairement. En revanche, pour comparer les mesures faites dans deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre, il faut se référer à des étalons communs aux deux référentiels.

On postule donc l'existence de tels étalons qui délivrent les mêmes unités de distance spatiale et de durée dans tous les référentiels. Les unités d'espace et de temps sont universelles.

D'autre part, nous retenons le principe de relativité : les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel galiléen.

2.2. Synchronisation des horloges

La synchronisation des horloges permet de définir la notion de simultanéité de deux événements se produisant en deux points différents : dans un référentiel galiléen, deux événements sont dits simultanés s'ils se produisent au même instant donné par les horloges placées en ces points.

Elle est un préalable indispensable à la description du mouvement d'un mobile se déplaçant d'un point à un autre et notamment à la détermination de sa vitesse.

Le fait que, dans un référentiel galiléen, deux expériences identiques, décalées par translation et rotation dans l'espace se déroulent avec les mêmes durées, permet théoriquement de synchroniser

[2] On peut entendre par phénomène physique le simple positionnement d'une particule en un point à un instant donné.
[3] Une horloge est un dispositif physique échantillonnant le temps par une succession de cycles identiques.

les horloges à partir de n'importe quel processus pouvant être reproduit de manière identique à des points différents et dans des directions différentes.

En raison de l'unicité du temps dans un référentiel donné, tout processus véritablement invariant conduit nécessairement à la même synchronisation, qui est donc unique. La synchronisation peut notamment être basée sur le déplacement rectiligne d'un mobile dont la vitesse est réputée constante quelle que soit sa position et la direction de son mouvement. Il n'est pas indispensable d'avoir recours à l'échange de rayons lumineux.

Imaginons que nous ayons procédé, séparément, à la synchronisation des horloges dans deux référentiels galiléens en mouvement relatif. Si, à un instant donné t dans un référentiel, toutes les horloges de l'autre référentiel marquent le même temps t' (qui peut donc être égalé à t par décalage d'ensemble), le temps est considéré comme absolu.

Les équations reliant les coordonnées d'espace et de temps d'un même événement dans deux référentiels galiléens sont alors les équations (dites galiléennes) de la Mécanique newtonienne. La loi d'addition des vitesses associée à ces équations n'impose pas de limitation à la vitesse d'un mobile.

A l'inverse, comme nous allons le montrer ci-dessous, si les temps apparaissent désynchronisés d'un référentiel à l'autre, c'est qu'il existe une vitesse limite dans les référentiels.

2.3. Changement de référentiel dans la théorie de la relativité restreinte

Nous allons rappeler comment sont établies les équations de changement de référentiel dans la théorie de la relativité restreinte.

2.3.1. Prise en compte de la désynchronisation

Considérons deux référentiels galiléen Σ (x, y, z, t) et Σ' (x', y', z', t') en mouvement l'un par rapport à l'autre parallèlement à l'axe (x). Fixons t = t'= 0 quand les origines des repères coïncident ; soit u la vitesse de Σ' par rapport à Σ.

La théorie de la relativité restreinte suppose que les référentiels ne peuvent aucunement être différenciés l'un de l'autre, y compris dans l'écriture des équations de changement de coordonnées. Il n'existe pas de référentiel privilégié. Notons que cette hypothèse va au-delà du strict principe de relativité, qui implique simplement qu'une expérience est décrite par les mêmes lois physiques dans chaque référentiel.

Un même événement est perçu au point (x, y, z, t) de Σ et au point (x', y, z, t') de Σ'.[4] Observons que, les référentiels étant galiléens, la nécessité d'invariance par translation dans l'espace et dans le temps impose que les équations de changement de coordonnées soient linéaires, donc de la forme ci-dessous (k étant un coefficient de dimension inverse d'une vitesse) :

$$x' = a\,(x - u\,t) \qquad (2.1)$$
$$t' = b\,(t - k\,x)$$

[4] La notion de perception d'un événement est précisée au paragraphe 2.4.1.

Nous nous plaçons dans l'hypothèse où les horloges apparaissent désynchronisées d'un référentiel à l'autre. Cela implique que le coefficient k n'est pas nul.

La désynchronisation se traduit par le fait, qu'à l'instant 0 dans un référentiel, les horloges de l'autre référentiel marquent un temps non nul (hormis celle de l'origine), variant linéairement avec leur abscisse.

L'inversion des équations (2.1) conduit à :

$$x = (1/(1 - k\,u))(x'/a + u\,t'/b) \qquad (2.1')$$
$$t = (1/(1 - k\,u))(t'/b + k\,x'/a)$$

Indépendamment de toute expérience, il est logique de considérer que, la vitesse du référentiel Σ' par rapport à Σ étant égale à u, la vitesse de Σ par rapport à Σ' est égale à $- u$.

Il en résulte que : $b = a$

Les équations (2.1) deviennent :

$$x' = a\,(x - u\,t) \qquad (2.2)$$
$$t' = a\,(t - k\,x)$$

2.3.2. <u>Existence d'une vitesse limite</u>

Les équations (2.2) permettent d'écrire :

$$dx'/dt' = (dx - u\,dt) / (dt - k\,dx) = (dx/dt - u) / (1 - k\,dx/dt)$$

soit, en posant : $v = dx/dt$ et $v' = dx'/dt'$:

$$v' = (v - u) / (1 - k\,v) \qquad (2.3)$$

Si l'on veut éviter une discontinuité pour v' (de $-\infty$ à $+\infty$) et compte tenu du fait que la valeur 0 appartient nécessairement à l'intervalle permis pour v, on doit avoir :

$$v < 1/k \quad \text{[en supposant } k > 0]$$

En raisonnant sur l'inverse de la relation (2.3), on obtient de même :

$$v' > - 1/k$$

L'isotropie des référentiels galiléens fait que, si la vitesse a une limite dans une direction, elle doit avoir la même limite dans la direction opposée. Il n'est pas nécessaire de supposer que la limite doit être la même dans les deux référentiels. Les vitesses v et v' doivent donc vérifier une double inégalité :

$$- w < v < w \qquad - w' < v' < w' \qquad (2.4)$$

w et w' étant les vitesses limite, qui doivent être inférieures à $1/k$ [en supposant $k > 0$].

Enfin, en raison de l'équivalence des référentiels,

la condition : $v \to w$ entraîne : $v' \to w'$

la condition : $v \to - w$ entraîne : $v' \to - w'$

Appliquées à l'équation (2.3), ces conditions impliquent :

$$(w - u) / (1 - k w) = (w + u) / (1 + k w)$$

d'où l'on tire : $k = u/w^2$

et: $w' = w$

La vitesse limite est la même dans les deux référentiels.

$$w < 1/k \quad \to \quad u < w$$

La vitesse relative des référentiels est nécessairement inférieure à la vitesse-limite.

La loi de composition des vitesses s'écrit finalement :

$$v' = (v - u) / (1 - u v/w^2) \qquad (2.5)$$

2.3.3. Formules de Lorentz

Les équations permettant de passer des coordonnées dans Σ aux coordonnées dans Σ' s'écrivent :

$$x' = a (x - u t) \qquad (2.6)$$
$$t' = a (t - u x/w^2)$$

Les équations inverses sont :

$$x = a' (x' + u t') \qquad (2.6')$$
$$t = a' (t' + u x'/w^2)$$

avec : $a a' = \Upsilon^2 = 1/(1- u^2/w^2)$

Si l'on prend : $w = \mathbf{c}$, vitesse de la lumière, et $a = a' = \Upsilon$ (pour ne pas différencier les référentiels), on obtient les formules de Lorentz :

$$x' = \Upsilon (x - u t) \qquad x = \Upsilon (x' + u t') \qquad (2.7)$$
$$t' = \Upsilon (t - u x / \mathbf{c}^2) \qquad t = \Upsilon (t' + u x'/ \mathbf{c}^2)$$

On voit qu'il n'est pas indispensable de partir du postulat de l'invariance de la vitesse de la lumière pour établir ce résultat. C'est l'existence d'une vitesse limite (sous-tendue par la désynchronisation des horloges) qui, jointe à l'hypothèse d'indifférenciation des référentiels, constitue l'élément-clé.

2.3.4. Dilatation ou contraction de l'espace et du temps

Avec les équations (2.7), hormis la désynchronisation du temps, on observe :

- une dilatation de la durée entre deux événements, mesurée à l'aide de deux horloges différentes (temps impropre) par rapport à la durée mesurée par une seule horloge (temps propre), c'est-à-dire dans le référentiel où ces événements ont la même position spatiale :

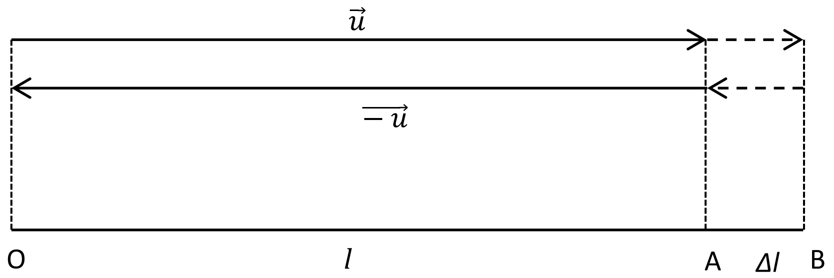
$$\Delta t' = \Upsilon\,\Delta t \text{ si } \Delta x = 0 \quad \text{et} \quad \Delta t = \Upsilon\,\Delta t' \text{ si } \Delta x' = 0\,;$$

- une contraction des longueurs mesurées à partir du référentiel mobile par rapport aux longueurs dans le référentiel fixe : $\Delta x' = \Delta x/\Upsilon$ si $\Delta t' = 0$ et $\Delta x = \Delta x'/\Upsilon$ si $\Delta t = 0$.

Réalité de la dilatation du temps

La dilatation du temps et son corollaire, la contraction des longueurs, ont-elles une réalité physique ou s'agit-il d'un effet apparent lié à la désynchronisation des horloges ?

Considérons l'expérience dite du « paradoxe des horloges »[5] :



Considérons deux référentiels galiléens : Σ et Σ' se déplaçant à la vitesse u par rapport à Σ.

Dans le référentiel Σ, une horloge est mise en mouvement de façon à atteindre la vitesse u et à se présenter devant O et O' au moment de leur conjonction ; elle se déplace de O en A à la vitesse u, elle est ralentie jusqu'à atteindre une vitesse nulle en B , puis accélérée en sens opposé à la vitesse $-u$ qu'elle conserve de A en O. L'horloge mobile est synchronisée avec les horloges de O et de O', de façon à ce que les trois horloges affichent le même temps (= 0) en O,O'.

Si l'on considère, qu'une fois mise en mouvement rectiligne à vitesse constante, l'horloge mobile continue à délivrer la même unité de temps que l'horloge-étalon, elle est parfaitement assimilable, lors de son voyage aller OA, à l'horloge de l'origine O' du référentiel Σ'.

Lorsque l'horloge mobile atteint le point A, les temps donnés par les horloges sont (d'après les équations (2.7)):

horloge A : t_1 (= l/u) horloge mobile : $t_1' = t_1/\Upsilon$

L'horloge mobile retarde donc par rapport à l'horloge fixe qui lui fait face, dans le rapport $1/\Upsilon$.

[5] ou « paradoxe des jumeaux».

Lorsqu'elle est de retour en A après avoir fait demi-tour, les temps sont :

horloge A : $t_2 = t_1 + \Delta t$ horloge mobile : $t'_2 = t_1/\Upsilon + \Delta t'$

(Δt et $\Delta t'$ sont les durées induites par le demi-tour de l'horloge mobile)

Par symétrie, le trajet de retour de l'horloge mobile a la même durée propre que le trajet aller ; d'autre part, les horloges en O et A étant synchronisées dans Σ, les durées mesurées dans ce référentiel sont également identiques [6].

Les temps à l'arrivée sont : horloge en O : $t_3 = 2\, t_1 + \Delta t$ horloge mobile : $t'_3 = 2\, t_1/\Upsilon + \Delta t'$

Δt et $\Delta t'$ sont des durées fixes, indépendantes de t_1 ; elles deviennent négligeables devant t_1 dès que ce dernier est suffisamment grand. On peut dire, qu'à son retour, l'horloge mobile doit présenter un décalage par rapport à l'horloge restée en A, dans un rapport $1/\Upsilon$ identique à celui du voyage aller.

Les expériences[7] confirment la réalité physique du décalage total et donc celle du décalage observé à l'aller. En conséquence, les observateurs de Σ n'ont pas seulement l'impression que les durées dans Σ' sont réduites par rapport à celles de leur propre référentiel ; pour eux, le temps s'écoule réellement plus lentement dans Σ' que dans Σ. Mais l'affirmation opposée peut tout aussi bien être faite par les observateurs de Σ' (il leur suffit de réaliser l'expérience exactement symétrique à partir de Σ').

Finalement il ne s'agit pas d'un paradoxe mais d'une contradiction effective, qui est acceptée par la théorie de la relativité restreinte. L'hypothèse de dilatation du temps permet de bâtir une théorie mathématiquement cohérente et en accord avec les observations. Mais cette théorie est physiquement contradictoire.[8]

2.4. Analyse alternative à celle de la relativité restreinte

2.4.1. Principes

Comment peut-on échapper à la contradiction qui vient d'être soulignée ?

Une hypothèse simple consiste à considérer que le temps s'écoule de façon universelle (ce qui veut dire qu'on n'observe pas de dilatation des durées) mais que la synchronisation des horloges ne permet pas de l'exprimer sous forme d'un temps absolu, en raison de l'existence d'une vitesse limite. D'autre part on considère l'espace comme absolu (pas de contraction des longueurs entre référentiels).[9]

[6] L'horloge mobile se déplace de façon identique dans les deux sens et respecte donc les conditions d'une expérience de synchronisation (cf. 2.2.)
[7] Il s'agit d'expériences réalisées avec des horloges atomiques (la première étant celle de Hafele et Keating en 1971).
[8] L'objection avait été soulevée en 1922 par Painlevé face à Einstein (cf. Vincent Borella « A propos du paradoxe de Langevin » *Philosophia Scientiæ*, tome 1, no 1 (1996), p. 63-82). Elle a été reprise maintes fois par la suite. Plusieurs solutions ont été proposées pour l'écarter, sans qu'un accord général puisse être obtenu.
[9] Observons que la conservation des distances et des durées par changement de référentiel pourrait constituer une condition nécessaire de validité du principe de relativité.

Les référentiels galiléens en mouvement relatif sont rattachés entre eux par la définition d'un instant origine des temps commun lorsque les origines des repères spatiaux sont confondues.

Avec l'hypothèse d'universalité du temps, tout événement tout événement est caractérisé par la durée T, qui le sépare de l'instant origine commun. Nous dirons qu'un événement est « produit » dans un référentiel si le temps(date) affiché par l'horloge du point auquel il est rattaché est identique à cette durée.

Considérons un événement se produisant au point (x , T) dans le référentiel Σ. Dans un référentiel Σ' en mouvement par rapport à Σ, l'événement est perçu en (x', t'). Du fait de la désynchronisation des horloges t' est différent de T (sauf si x' = 0) ; mais, pour les observateurs de Σ, la durée écoulée à l'horloge d'abscisse x' est bien égale à T (Nous verrons au paragraphe suivant quelles sont les équations de changement de coordonnées qui permettent de conserver les durées et les distances).

Maintenant il faut bien comprendre que, si nous partons d'un événement se produisant dans Σ' au point de coordonnées (x', t'), cet événement ne sera pas perçu dans Σ en (x, T) mais en un point de coordonnées différentes (x_1, t_1). Il n'y a là rien d'étonnant puisque l'événement de Σ' se produit après une durée T'= t' (≠ T).

Le changement de coordonnées n'est plus biunivoque comme c'est le cas dans la théorie de la relativité restreinte. Cela vient du fait qu'un événement, considéré comme « produit » dans le référentiel où l'horloge affiche la durée réellement écoulée, est « perçu » à un temps différent dans un autre référentiel en mouvement et qu'il n'y a pas de correctif lié à la dilatation des durées.

2.4.2. Nouvelles équations de changement de coordonnées

Partons d'un événement se produisant au point (x, t) dans Σ. Reprenons les équations (2.6) :

$$x' = a\,(x - u\,t)$$
$$t' = a\,(t - u\,x / w^2)$$

Il est facile de vérifier que l'absence de dilatation des distances et des durées se traduit simplement par a = Υ^2. En effet, on a alors :

$$\Delta x' = \Delta x \quad \text{si} \quad \Delta t' = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta t' = \Delta t \quad \text{si} \quad \Delta x' = 0$$

Mesurées dans le référentiel Σ', les distances et les durées sont bien égales à ce qu'elles sont dans Σ.

Le coefficient Υ^2 traduit le fait, qu'à un instant donné dans Σ, ce référentiel est en correspondance avec une image déformée de Σ' (les horloges apparaissent désynchronisées), ce qui est un effet cinématique. Alors que, dans la théorie de la relativité restreinte, le coefficient Υ traduit la désynchronisation couplée à une déformation réelle de l'espace et du temps ($\Upsilon = \Upsilon^2 / \Upsilon$).

La contradiction soulignée au paragraphe 2.4.2 (paradoxe des horloges) disparaît.

Conséquence importante : **le retard d'une horloge en mouvement ne peut plus être attribué à la dilatation du temps.** [10]

Finalement les équations de changement de coordonnées s'écrivent :

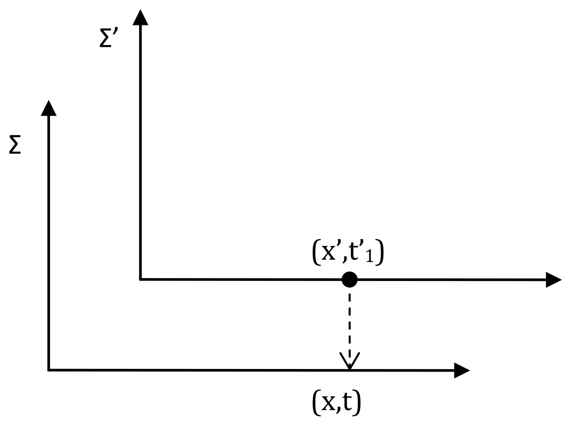
- pour un événement se produisant dans le référentiel Σ :

$$x' = \Upsilon^2 (x - u\,t) \qquad x = x' + u\,t' \qquad (2.8)$$
$$t' = \Upsilon^2 (t - u\,x / \mathbf{c}^2) \qquad t = t' + u\,x' / \mathbf{c}^2$$

- pour un événement se produisant dans le référentiel Σ' :

$$x = \Upsilon^2 (x' + u\,t') \qquad x' = x - u\,t \qquad (2.8a)$$
$$t = \Upsilon^2 (t' + u\,x' / \mathbf{c}^2) \qquad t' = t - u\,x / \mathbf{c}^2$$

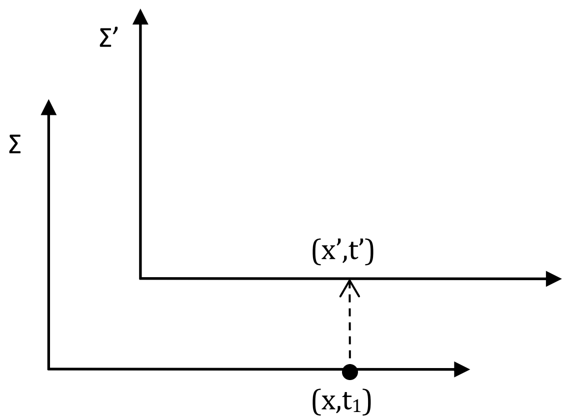
Comment appliquer les équations ci-dessus pour décrire la conjonction des points de coordonnées x dans Σ et x' dans Σ' ?



Pour chaque observateur, la conjonction des coordonnées x et x' est perçue comme une expérience se produisant dans son propre référentiel.

Pour l'observateur de Σ, il s'agit du déplacement à la vitesse u d'un mobile (x') qui passe en x à l'instant t. En application des équations (2.8) :

$$x = x' + u\,t_1' \qquad (2.9)$$
$$t = t'_1 + u\,x'/\mathbf{c}^2$$



Pour l'observateur de Σ', il s'agit du déplacement à la vitesse - u d'un mobile (x) qui passe en x' à l'instant t'. En application des équations (2.8a) :

$$x' = x - u\,t_1 \qquad (2.10)$$
$$t' = t_1 - u\,x/\mathbf{c}^2$$

Il vient immédiatement :

$$t_1 = t'_1 = (x - x')/u = t'' \qquad (2.11)$$

t_1 et t'_1 représentent donc la durée t'' donnée par la transformation galiléenne.

On a : $t = t'' + u\,x'/\mathbf{c}^2$ et $t' = t'' - ux/\mathbf{c}^2$

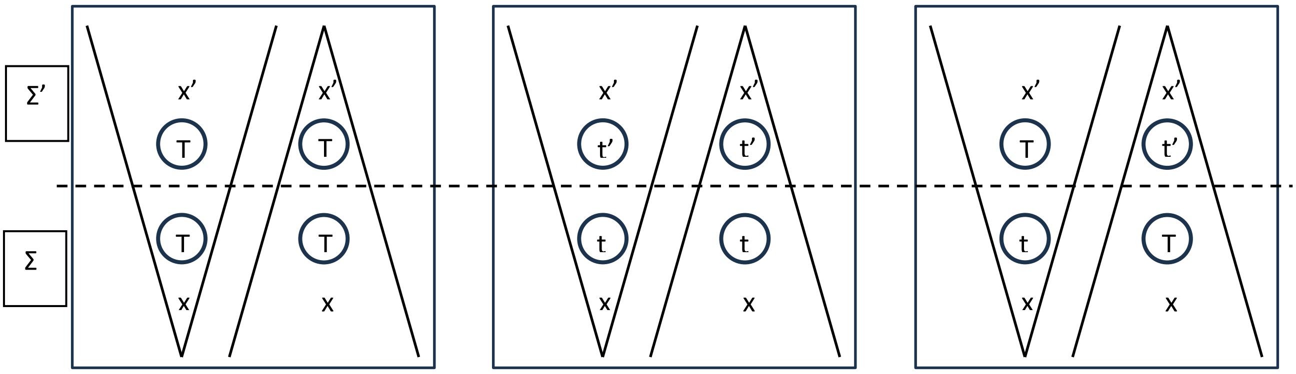
[10] cf. § 3.3.1.

Il est important de noter que l'on a affaire à deux expériences différentes.

Finalement on peut traduire ce qui vient d'être exposé par l'affirmation suivante :

La conjonction des coordonnées x du référentiel Σ et x' du référentiel Σ' constitue un double événement, produit à des temps t et t' différents l'un de l'autre. En revanche, les deux événements sont perçus à un temps identique dans les deux référentiels, égal à la durée donnée par la transformation galiléenne.

Les schémas ci-dessous illustrent la perception de la conjonction des coordonnées x et x' selon que l'on se place dans le cadre de la Mécanique newtonienne, de la relativité restreinte ou de la nouvelle approche proposée. On imagine que le contact des de x et de x' déclenche la prise de deux photos, l'une depuis le référentiel Σ (en x), l'autre depuis le référentiel Σ' (en x').



Mécanique newtonienne

$$T = (x - x')/u$$

Relativité restreinte

$$t = (x - x'/\gamma)/u$$
$$t' = (x/\gamma - x')/u$$

Nouvelle approche

$$t = (x - x'/\gamma^2)/u$$
$$t' = (x/\gamma^2 - x')/u$$

Considérons maintenant le cas d'un événement « produit » dans un référentiel Σ et « perçu » dans deux autres référentiels Σ' et Σ''.

Soient : u' la vitesse de Σ' par rapport à Σ, u'' la vitesse de Σ'' par rapport à Σ.

A partir des équations (2.8) on obtient les équations de changement de coordonnées permettant de passer de Σ' à Σ'' :

$$x'' = a''(x' - U\,t') \qquad \text{avec : } a'' = (1 - u'\,u''/w^2)/(1 - u''^2/w^2)$$
$$t'' = a''(t' - U\,x'/w^2) \qquad U = (u'' - u')/(1 - u'\,u''/w^2)$$

Que dire enfin d'un événement « perçu » dans Σ' et Σ'' sans qu'on connaisse d'avance le référentiel où il est « produit » ?

Connaissant les coordonnées (x', t') et (x'', t'') de l'événement, on détermine, à partir des équations ci-dessus, les valeurs de a'' et U et, puis celles de u' et u'', ce qui permet de définir le référentiel de rattachement de l'événement.

Conclusion :

Dans la Mécanique newtonienne, il n'y a pas de distinction entre événement « produit » ou « perçu » puisque le temps est absolu.

Dans la théorie de la relativité restreinte, on ne fait pas non plus cette distinction en imposant un changement de coordonnées biunivoque. Cela revient à supposer que la conjonction des deux points de coordonnées x dans Σ et x' dans Σ' constitue un même événement « produit » simultanément dans les deux référentiels.

C'est ce qui conduit à la contradiction : si le temps n'est pas absolu, un événement ne peut pas être considéré comme « produit » dans tous les référentiels, exception faite de l'événement servant à définir l'instant origine commun.

3. Approche relativiste à partir de l'équivalence entre masse et énergie

Ce chapitre expose une autre approche du problème, basée sur des considérations énergétiques, qui apporte une justification à l'analyse alternative présentée au sous-chapitre 2.4.

3.1. Relation entre les énergies calculées dans deux référentiels galiléens

3.1.1. La physique des particules a validé le principe d'équivalence entre masse et énergie.

Nous allons montrer qu'on peut déduire de ce principe l'existence d'une vitesse limite.

Nous postulons que, dans tout référentiel galiléen Σ (x, y, z, t)**, il existe la relation suivante entre la masse**[11] m **d'une particule et son énergie totale** E **:**

$$E = m\,\mathbf{c}^2 \qquad (3.1)$$

m dépend de la vitesse de la particule. Il s'agit de la masse inertielle qui entre en jeu dans la définition de la quantité de mouvement de la particule.

Le facteur $\mathbf{c}$ est un coefficient indépendant de m ayant la dimension d'une vitesse. Pour l'instant $\mathbf{c}$ ne désigne pas nécessairement la vitesse de la lumière parce que le raisonnement qui va suivre ne se réfère pas à des rayons lumineux.

3.1.2. On se limite à un problème unidimensionnel en considérant une particule se déplaçant parallèlement à l'axe (x). Cette particule est soumise à l'action d'une force F également parallèle à l'axe (x). Soit v la vitesse de la particule.

L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$d(mv)/dt = F \qquad (3.2)$$

La variation d'énergie est égale au travail de la force :

$$dE = F\,dx, \text{ soit : } dE/dt = F\,dx/dt = F\,v$$

ou encore :

$$\mathbf{c}^2\,dm/dt = F\,v \qquad (3.3)$$

Des équations (3.2) et (3.3) on tire :

$$\mathbf{c}^2\,dm/dt = v\,d(mv)/dt$$

$$\mathbf{c}^2\,dm/dt = mv\,dv/dt + v^2\,dm/dt$$

$$(dm/dt)/m = v\,(dv/dt)/(\mathbf{c}^2 - v^2) = -\,(d(\mathbf{c}^2 - v^2)/dt)/(\mathbf{c}^2 - v^2)/2$$

[11] On ne réserve pas le terme « masse » à la masse au repos.

En intégrant il vient : $\ln(m) = \ln((\mathbf{c}^2 - v^2)^{-1/2})$ + constante

Et, finalement, en désignant par m_0 la masse au repos de la particule dans Σ :

$$m = m_0/(1 - v^2/\mathbf{c}^2)^{1/2} \tag{3.4}$$

Donc : $$E = m_0\,\mathbf{c}^2/(1 - v^2/\mathbf{c}^2)^{1/2} \tag{3.5}$$

Cette expression de E est bien celle qui est vérifiée par les expériences.

c apparaît comme la limite de la vitesse d'une particule de masse non nulle.

D'autre part, en désignant par p (= mv) la quantité de mouvement, on a la relation :

$$E^2 - p^2\,\mathbf{c}^2 = m_0^2\,\mathbf{c}^4 \tag{3.6}$$

3.1.3. Considérons maintenant un deuxième référentiel galiléen Σ' (x', y', z', t') en mouvement par rapport au premier, parallèlement à l'axe (x), à la vitesse u. La relation entre masse et énergie s'y écrit :

$$E' = m'\,\mathbf{c}^2 \qquad (E'_0 = m'_0\,\mathbf{c}^2 \text{ pour la particule au repos dans } \Sigma')$$[12]

Les expressions de la masse et de l'énergie dans le référentiel Σ' sont : [13]

$$m' = m'_0/(1 - v'^2/\mathbf{c}^2)^{1/2} \tag{3.4'}$$

$$E' = m'_0\,\mathbf{c}^2/(1 - v'^2/\mathbf{c}^2)^{1/2} \tag{3.5'}$$

Posons : $\underline{u} = u\,/\,\mathbf{c} \qquad \underline{v} = v\,/\,\mathbf{c} \qquad \underline{v}' = v'/\,\mathbf{c}$

La loi de composition des vitesses (2.5) s'écrit :

$$\underline{v'} = (\underline{v} - \underline{u})/(1 - \underline{u}\,\underline{v})$$

Cette loi est bien vérifiée par les expériences mettant en jeu des interactions entre particules.

On a donc : $$(1 - \underline{v}'^2) = ((1 - \underline{u}\,\underline{v})^2 - (\underline{v} - \underline{u})^2)/(1 - \underline{u}\,\underline{v})^2$$

soit : $$(1 - \underline{v}'^2) = (1 - \underline{u}^2)(1 - \underline{v}^2)/(1 - \underline{u}\,\underline{v})^2 \tag{3.7}$$

3.1.4. Les valeurs de l'énergie de la particule exprimées dans les deux référentiels sont donc liées par la relation ci-dessous :

$$E' = (m'_0/m_0)\,E\,(1 - \underline{u}\,\underline{v})/(1 - \underline{u}^2)^{1/2} \tag{3.8}$$

---

[12] La vitesse limite **c** est supposée identique dans tous les référentiels, de façon à ne pas imposer de différenciation entre eux par rapport aux lois de la Physique. En revanche, il n'est pas obligatoire que les masses au repos soient identiques, comme nous le verrons au sous-chapitre 3.2.

[13] En application du principe de relativité, la loi fondamentale de la dynamique s'exprime de la même façon dans Σ' que dans Σ.

La relation inverse s'écrit :

$$E = (m_0/m'_0)\, E' \,(1 + \underline{u}\,\underline{v'})/(1 - \underline{u}^2)^{1/2} \qquad (3.8')$$

3.2. Choix d'un invariant pour l'énergie

Les relations (3.8) et (3.8') font apparaître le ratio m'_0/m_0. La valeur à donner à ce ratio dépend du choix d'une relation entre les énergies au repos de la particule dans les deux référentiels.

Deux hypothèses apparaissent raisonnablement envisageables :

- celle de l'invariance de la masse au repos (cf. 3.2.1.);
- celle de la conservation de l'énergie totale par changement de référentiel (cf. 3.2.2.).

3.2.1. Invariance de la masse au repos de toute particule

La première hypothèse postule que la masse au repos d'une particule est une caractéristique intrinsèque à la particule, donc invariante par changement de référentiel. Ce postulat, identique à celui de la Mécanique classique, est aussi celui de la relativité restreinte. L'énergie au repos a la même valeur dans tous les référentiels.

Avec $m'_0/m_0 = 1$, les équations (3.8) et (3.8') deviennent :

$$E' = E\,(1 - \underline{u}\,\underline{v})/(1 - \underline{u}^2)^{1/2} \qquad (3.9)$$

$$E = E'\,(1 + \underline{u}\,\underline{v'})/(1 - \underline{u}^2)^{1/2} \qquad (3.9')$$

En notant : $p = m\,\mathbf{c}\,\underline{v}$ la quantité de mouvement, et en posant : $\Upsilon = 1/(1- u^2/\mathbf{c}^2)^{1/2}$, il vient :

$$E' = \Upsilon\,(E - \underline{u}\,p\,\mathbf{c}) \qquad (3.10)$$

On retrouve la relation relativiste usuelle.

Montrons que l'hypothèse d'invariance de la masse au repos est compatible avec les formules de Lorentz. Partons de l'équation de la dynamique dans Σ' [14]:

$$d(m'v') = F\,dt' \quad \text{avec} \quad m' = \Gamma'\,m_0 \quad \text{et} \quad \Gamma' = 1/(1 - \underline{v'}^2)^{1/2}$$

soit : $$d(\Gamma' v') = (F/m_0)\,dt'$$

La relation (3.7) et la loi de composition des vitesses (2.5) permettent d'écrire Γ' sous la forme :

$$\Gamma' = \Upsilon\,\Gamma\,(1 - \underline{v}\,\underline{u}) \qquad (\text{avec} \quad \Gamma = 1/(1 - \underline{v}^2)^{1/2})$$

[14] Nous admettons que, lorsque $\vec{F}$ est colinéaire à $\vec{v}$, sa valeur est conservée par changement de référentiel.

$$\Gamma' v' = \Upsilon\, \Gamma\, (v - u)$$

$$d(\Gamma' v') = \Upsilon\, (d(\Gamma\, v) - u\, d\Gamma) \qquad (3.11)$$

Montrons que : $u\, d\Gamma = d(\Gamma\, v)\, \underline{u}\, \underline{v}$

$$d(\Gamma\, v)\, \underline{u}\, \underline{v} = \Gamma\, \underline{u}\, \underline{v}\, dv + \underline{u}\, \underline{v}\, v\, d\Gamma$$

$d\Gamma = \Gamma^3\, \underline{v}\, d\underline{v}$ $\rightarrow$ $d(\Gamma\, v)\, \underline{u}\, \underline{v} = u/\Gamma^2\, d\Gamma + u\, \underline{v}^2\, d\Gamma = u\, (1/\Gamma^2 + \underline{v}^2)d\Gamma = u\, d\Gamma$

(3.11) $\rightarrow$ $d(\Gamma' v') = \Upsilon\, (d(\Gamma\, v) - \underline{u}\, \underline{v}\, d(\Gamma v))$ (3.11')

L'équation de la dynamique dans Σ s'écrit :

$$d(\Gamma v) = (F/m_0)\, dt$$

En éliminant F/m_0, (3.11') $\rightarrow$ $dt' = \Upsilon\, (dt - \underline{u}\, \underline{v}\, dt)$

$v = dx/dt$ $\rightarrow$ $dt' = \Upsilon\, (dt - (u/\mathbf{c}^2)\, dx)$ (3.12)

On retrouve bien la formule de Lorentz portant sur les coordonnées temporelles.

3.2.2. Conservation de l'énergie totale par changement de référentiel

Pour bien comprendre cette deuxième hypothèse, imaginons l'expérience suivante :

- deux particules identiques, de même masse au repos m_0 dans Σ, sont immobiles dans ce référentiel ; elles ont une vitesse égale à - u dans Σ' ;
- un observateur de Σ augmente de 0 à u la vitesse de la première particule en lui fournissant de l'énergie ;
- un observateur de Σ' ramène de - u à 0 la vitesse de la deuxième particule en lui retirant de l'énergie ;
- les deux particules sont maintenant au repos par rapport à Σ' ; quelle est la masse au repos de chacune dans Σ' ?

Si l'on répond qu'elle reste égale à m_0, on opte pour l'invariance de la masse au repos.

La seconde hypothèse postule que la différence entre les énergies au repos d'une particule est égale à l'énergie qui lui est fournie (ou retirée) pour passer d'une vitesse nulle dans un référentiel à une vitesse nulle dans l'autre référentiel ; l'énergie totale de la particule est en quelque sorte transférée d'un référentiel à l'autre.

L'énergie cinétique n'est donc plus considérée comme « perdue » lors du passage d'un référentiel à l'autre, comme c'est le cas avec l'hypothèse d'invariance de la masse au repos.[15]

[15] Le terme « énergie cinétique » devient inapproprié. On doit considérer que l'accélération communiquée à la particule a deux effets : augmenter sa quantité de mouvement et augmenter son énergie totale. Comment ce

Plus précisément, l'énergie au repos d'une particule dans un référentiel Σ' est égale à son énergie au repos dans le référentiel Σ :

- majorée par le supplément d'énergie qui lui est donné dans le référentiel Σ si l'action sur la particule s'exerce dans le référentiel Σ, alors : $m'_0 = \Upsilon m_0$
- minorée par le décrément d'énergie qu'elle subit dans le référentiel Σ' si l'action sur la particule s'exerce dans le référentiel Σ', alors : $m'_0 = m_0/\Upsilon$

En fait, selon l'action exercée, m'_0 peut prendre toute valeur comprise entre m_0/Υ et Υm_0. On peut dire que l'énergie au repos d'une particule dépend de son histoire.

Observons maintenant qu'une expérience doit nécessairement être définie dans un référentiel où l'on connaît l'énergie au repos des particules et où l'on sait définir les actions exercées. Les énergies mises en jeu sont échangées au sein de ce référentiel. Désignons ce référentiel par Σ.[16]

Le passage au référentiel Σ' en mouvement se fait en adoptant une masse au repos $m'_0 = \Upsilon\ m_0$ (l'action pour amener la particule au repos dans Σ' se fait dans Σ)[17]. L'équation (3.8) devient :

$$E' = E\ (1 - \underline{u}\ \underline{v})/(1 - \underline{u}^2) \tag{3.13}$$

Et l'équation inverse (3.8') donne :

$$E = E'\ (1 + \underline{u}\ \underline{v}') \tag{3.13'}$$

L'équation (3.13) peut aussi s'écrire :

$$E' = \Upsilon^2\ (E - \underline{u}\ p\ \mathbf{c}) \tag{3.14}$$

S'agissant des équations de changement de coordonnées, on voit tout de suite que les formules de Lorentz ne sont plus respectées.

Avec $m'_0 = \Upsilon\ m_0$ l'équation (3.12) devient :

$$dt' = \Upsilon^2\ (dt - (u/\mathbf{c}^2)\ dx) \tag{3.15}$$

Les équations de changement de coordonnées s'écrivent alors :

$$x' = \Upsilon^2\ (x - u\ t) \tag{3.16}$$
$$t' = \Upsilon^2\ (t - u\ x/\mathbf{c}^2)$$ identiques aux équations (2.8)

---

surcroît d'énergie emmagasiné se traduit-il pour la particule ? Sa durée de vie est augmentée (cf. paragraphe 3.3.1). Nous verrons aussi au chapitre 5 (Gravitation) que, lorsqu'une source gravitationnelle est en mouvement, c'est son énergie totale qui doit être prise en compte pour déterminer son action gravitationnelle, de même que c'est la masse relativiste qui intervient dans l'équation fondamentale de la dynamique.

[16] On retrouve là ce qui a été exposé au chapitre 2 en ce qui concerne les événements. On considère que l'expérience est « produite » dans le référentiel Σ.

[17] Si, pour une expérience menée dans Σ, on connaît la masse au repos m'_0 dans Σ', la masse au repos à retenir dans Σ est bien évidemment : $m_0 = m'_0/\Upsilon$.

ou, en prenant les équations inverses:

$$x = x' + u\,t' \qquad (3.16')$$
$$t = t' + u\,x'/\mathbf{c}^2$$

Si l'on partait d'une expérience dans Σ', les équations seraient :

$$x = \Upsilon^2\,(x' + u\,t') \qquad (3.16a)$$
$$t = \Upsilon^2\,(t' + u\,x'/\mathbf{c}^2) \qquad \text{identiques aux équations (2.8a)}$$

Au seul jeu de coordonnées [x',t'] dans le référentiel Σ', peuvent donc correspondre deux jeux distincts dans le référentiel Σ :

- par les équations (3.16') : [x, t]
- par les équations (3.16a) : [Υ^2 x, Υ^2 t]

Nous avons expliqué au sous-chapitre 2.4 pourquoi il n'y a pas de contradiction.

3.3. Conséquences de l'invariance de l'énergie totale

3.3.1. Influence de l'énergie sur le rythme des horloges

Nous avons vu au paragraphe 2.3.4 qu'une horloge (atomique) en mouvement retarde par rapport à une horloge restée fixe dans un référentiel. Dans l'hypothèse où nous nous plaçons[18], **ceci ne peut s'expliquer qu'en admettant que le niveau d'énergie influe sur le rythme de l'horloge.**[19]

Si T désigne la période d'une horloge au repos et T' la période de cette même horloge mise en mouvement à la vitesse u, on a :

$$T'/T = E'_0/E_0 = m'_0/m_0 = \Upsilon = 1/(1- u^2/\mathbf{c}^2)^{1/2} \qquad (3.17)$$

Notons que, si Δt et Δt' désignent les durées mesurées par les horloges, on a :

$$E_0\,\Delta t = E'_0\,\Delta t' \qquad (3.18)$$

Le produit de l'énergie par la durée mesurée par l'horloge est un invariant.

Selon le choix d'invariant fait pour l'énergie, on est donc conduit à des interprétations différentes pour certains phénomènes considérés comme base de vérification expérimentale de la théorie de la relativité restreinte :

- *dans le cadre de la RR*, le retard des horloges en mouvement et l'augmentation de la durée de vie des muons atmosphériques voyageant à grande vitesse sont imputés à la dilatation du temps entre les référentiels ; on suppose que les horloges continuent à délivrer la même unité de temps ;

[18] cf. § 2.4.2.
[19] Nous proposons par ailleurs un raisonnement simple expliquant cette influence dans le cas d'une horloge atomique à atomes de césium.

- *avec le choix de conservation de l'énergie totale* par changement de référentiel, ces phénomènes sont imputés à la modification de l'énergie au repos des atomes de l'horloge atomique ou de celle des muons, du fait de l'énergie reçue pour passer du référentiel Σ au référentiel Σ' ; l'écoulement du temps n'est pas modifié, mais les horloges ne délivrent plus la même unité de temps.

Cette influence de l'énergie sur le rythme des horloges peut-elle être étendue à d'autres types d'horloges que les horloges atomiques ?

Les horloges mécaniques ne devraient pas être affectées dans la mesure où l'ensemble de leurs éléments constitutifs subissent la même variation relative de masse. Ainsi, un oscillateur simple, de masse m_0 et de raideur k est caractérisé par une période $T = 2\pi\,(m_0/k)^{1/2}$ qui reste inchangée si la raideur varie comme la masse.

Une horloge à impulsion lumineuse peut être schématisée comme un tube fermé par deux miroirs parallèles entre lesquels des photons effectuent des allers-retours dont un mécanisme compte le nombre. L'universalité de la vitesse de la lumière [20] fait qu'une telle horloge n'est pas affectée par sa mise en mouvement à vitesse uniforme.

3.3.2. Conception de l'espace et du temps

La relativité restreinte peut être associée à la conception d'un espace-temps considéré comme un espace affine de dimension 4. Dans l'espace vectoriel associé à cet espace affine, le temps se différencie des coordonnées d'espace dans la définition du produit salaire, qui n'est pas euclidien : le produit des coordonnées de type temps est affecté du signe opposé à celui des produits des coordonnées de type espace.

Cela conduit à définir le carré de l'intervalle spatio-temporel entre deux événements sous la forme :

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \mathbf{c}^2\Delta t^2 \tag{3.19}$$

Pour la relativité restreinte, cette quantité est invariante par changement de référentiel galiléen. On montre facilement que les formules de Lorentz se déduisent de cette invariance.

L'élégance de cette mise en forme mathématique a sans doute largement contribué à l'acceptation de la théorie, malgré le caractère contre-intuitif d'un écoulement du temps différent dans deux référentiels en mouvement relatif et la contradiction à laquelle on aboutit.

Dans l'approche que nous proposons, nous récusons cette conception de l'espace et du temps. L'écoulement du temps reste universel et complètement indépendant du référentiel, comme dans la Mécanique newtonienne.

En revanche le temps n'est pas absolu en raison de l'existence d'une vitesse limite, identique dans tous les référentiels du fait du principe de relativité : les horloges du référentiel mobile apparaissent désynchronisées par rapport à celles du référentiel considéré comme fixe.

---

[20] cf. § 4.1.2.

Nous avons montré que la solution obtenue pour les équations de changement de référentiel est cohérente avec l'hypothèse de conservation de l'énergie totale (einsteinienne) d'une particule, en lieu et place de l'invariance de la masse au repos.

La distance spatiale séparant deux événements reste invariante dans tous les référentiels galiléens, comme dans la Mécanique newtonienne.

3.3.3. Référentiel privilégié, vitesse vraie et énergie vraie

L'équation (3.13) montre que E' est différent de E, sauf pour $v = u$.

La règle de conservation de l'énergie totale a pour conséquence que, dans tout référentiel, l'énergie d'une particule au repos est une énergie « vraie », représentant la quantité maximale d'énergie susceptible d'être libérée.[21] En revanche l'énergie totale attribuée à la particule en mouvement n'est pas nécessairement une énergie « vraie ».

Le référentiel dans lequel est définie une expérience joue un rôle privilégié : l'énergie au repos y est connue, de même que les transferts réels d'énergie. L'énergie calculée dans ce référentiel est une énergie « vraie » à tout moment. On peut faire de cette propriété la caractéristique distinctive de ce référentiel privilégié par rapport aux autres référentiels.

On doit donc aussi considérer la vitesse de la particule comme une vitesse « vraie » dans le référentiel de l'expérience.

En fonction de la vitesse et de l'énergie totale, l'équation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$(v/c)d(E\, v/c) = dE$$

Dans le référentiel de l'expérience, cette équation fait intervenir une vitesse « vraie » et une énergie « vraie », alors qu'il s'agit de valeurs apparentes de ces grandeurs dans un autre référentiel.

[21] Mais, ainsi que nous l'avons vu au paragraphe 3.2.2, deux particules identiques au repos dans un même référentiel peuvent avoir des énergies différentes, en fonction des actions qu'elles ont subies.

4. *Prise en compte des phénomènes lumineux*

4.1. Vitesse et fréquence des ondes électromagnétiques

4.1.1. Vitesse de la lumière comme vitesse limite

La lumière est un rayonnement électromagnétique. Selon la théorie électromagnétique de Maxwell, ce rayonnement peut être représenté comme une onde électromagnétique, qui se propage de façon uniforme dans toutes les directions à partir de sa source, sa vitesse $\mathbf{c}$ étant reliée à deux constantes :

- la permittivité diélectrique du vide : $\boldsymbol{\varepsilon_0}$
- la perméabilité magnétique du vide : $\boldsymbol{\mu_0}$

par la relation : $\mathbf{c}^2 = 1 / \boldsymbol{\varepsilon_0} \boldsymbol{\mu_0}$

Il semble logique d'admettre que $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ et $\boldsymbol{\mu_0}$ sont des constantes universelles, ayant la même valeur quel que soit le repère galiléen considéré, et donc que la valeur de $\mathbf{c}$ ne dépend pas non plus du référentiel : **la lumière émise par une source fixe dans un référentiel galiléen se propage à la vitesse $\mathbf{c}$ dans ce référentiel.**

D'autre part, la théorie électromagnétique prévoit qu'un éclair lumineux contenant une énergie E doit avoir une impulsion[22] $\mathrm{E}/\mathbf{c}$, ce qui est vérifié par l'expérience. Il en résulte que l'équation (3.6) liant énergie et quantité de mouvement reste valable pour un éclair lumineux, à condition de considérer que son énergie et son impulsion sont portées par des particules de masse nulle : les photons.

L'équation (3.5) montre qu'il est possible d'associer une énergie finie à une particule de masse infiniment petite lorsque sa vitesse tend vers la vitesse limite $\mathbf{c}$.

La vitesse de la lumière constitue donc la vitesse limite pour les particules massives. Cela est vérifié par l'expérience. Dès lors, les équations de changement de coordonnées (2.7) ou (3.16) sont applicables également à la propagation des ondes lumineuses.

4.1.2. Universalité de la vitesse de la lumière

Dans la théorie de la relativité restreinte, l'invariance de l'intervalle spatio-temporel (cf. équation 3.9) conduit immédiatement au résultat suivant : **la vitesse de la lumière est égale à $\mathbf{c}$ dans tous les référentiels, que la source soit fixe ou mobile et quelle que soit la direction de propagation.**

Dans l'approche alternative basée sur la conservation de l'énergie totale, l'émission d'un rayon lumineux doit nécessairement être rapportée au référentiel où sa source est fixe et sa vitesse égale à $\mathbf{c}$. L'invariance de la distance et de la durée dans tous les référentiels[23] fait que la vitesse « vraie » de la lumière reste bien égale à $\mathbf{c}$, quel que soit le référentiel de calcul.

---

[22] L'impulsion d'un photon est la quantité de mouvement qu'il cède lorsqu'il est absorbé.
[23] c. § 3.3.2.

En revanche, la vitesse apparente de la lumière est inférieure à $\mathbf{c}$ dans les directions autres que celle du déplacement du référentiel mobile (aussi égale à $\mathbf{c}$ pour une propagation perpendiculaire à celle du déplacement du référentiel). On s'en assure facilement en vérifiant que l'expression $(\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - \mathbf{c}^2\Delta t'^2)$ est négative quand $(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \mathbf{c}^2\Delta t^2)$ est nul.

4. 1.3. Effet Doppler

Comme rappelé plus haut, selon la théorie de Maxwell, la propagation d'une onde lumineuse est définie par rapport à sa source ; il convient de raisonner dans le référentiel où cette source est fixe.

Lorsqu'un observateur se déplace par rapport à une source lumineuse, la fréquence qu'il perçoit est modifiée. Calculée dans le référentiel d'une source de fréquence propre ν_S[24], cette fréquence est :

$\nu = (1 - u/\mathbf{c})\, \nu_S$ si l'observateur s'éloigne de la source à la vitesse $u>0$; (4.1)

$\nu = (1 + u/\mathbf{c})\, \nu_S$ si l'observateur se rapproche de la source.

Dans le référentiel de l'observateur, il faut tenir compte :

- *dans le cas de la relativité restreinte*, de la dilatation des durées ; les périodes mesurées sont réduites, les fréquences augmentées, elles deviennent :

$$\nu = \Upsilon(1 - u/\mathbf{c})\, \nu_S = ((1 - u/\mathbf{c})/(1 + u/\mathbf{c}))^{1/2}\, \nu_S \quad (4.2)$$

et

$$\nu = \Upsilon(1 + u/\mathbf{c})\, \nu_S = ((1 + u/\mathbf{c})/(1 - u/\mathbf{c}))^{1/2}\, \nu_S$$

- *dans le cas de la conservation de l'énergie totale*, les équations (4.1) restent valables si l'horloge de l'observateur délivre bien la même unité de temps que celle de la source.[25] Dans les expériences terrestres que l'on peut réaliser, ce n'est pas le cas : l'observateur se met en mouvement par rapport à la source, ou bien la source est mise en mouvement par rapport à l'observateur.
  Dans la première hypothèse, l'horloge de l'observateur bat à un rythme plus lent, la fréquence apparente de l'onde augmente ; on retrouve les équations (4.2). Dans la seconde hypothèse, on retrouve ces mêmes équations en considérant que la source, qui a vu son énergie augmenter du facteur Υ, voit sa fréquence propre augmenter du même facteur pour passer à $\Upsilon\, \nu_S$.[26]

Les équations (4.2) sont vérifiées par les expériences.

---

[24] La fréquence propre est la fréquence de la source dans le référentiel où elle est au repos.

[25] Le passage du référentiel de la source à celui de l'observateur se fait sans dilatation des durées (cf. § 3.3.1.).
On peut vérifier le résultat à partir de l'équation de l'onde dans le référentiel où la source est fixe.
Cette équation s'écrit : $A = A_0 \sin(\omega(t - x/\mathbf{c}))$ pour une onde de vitesse $+\mathbf{c}$.
Le changement de coordonnées donne (équations 3.16') : $A = A_0 \sin(\omega(t' + u\, x'/\mathbf{c}^2 - x'/\mathbf{c} - u\, t'/\mathbf{c}))$
u étant la vitesse de l'observateur par rapport à la source.
soit : $A = A_0 \sin(\omega(1 - u/\mathbf{c})(t' - x'/\mathbf{c}))$

[26] cf. 4.2. ci-après ; l'énergie des photons est proportionnelle à la fréquence.

4.1.4. Interprétation du décalage spectral de sources éloignées

Dans le cadre de la relativité restreinte, on peut relier sans difficulté la fréquence observée dans un référentiel terrestre et la vitesse de la source puisque la fréquence au repos est supposée identique dans tous les référentiels : il suffit d'appliquer les équations (4.2).

Dans le cas de la conservation de l'énergie totale, on ne sait pas a priori quelle est la fréquence de la source car, pour un même élément, la masse au repos peut être différente d'un référentiel à l'autre. Si l'on fait l'hypothèse que la fréquence propre de la source est la même que dans le référentiel terrestre, ce sont les équations (4.1) qui s'appliquent ; le résultat est donc différent de celui donné par la théorie de la relativité restreinte.

Toutefois, la différence ne devient significative que lorsque le ratio $v/\mathbf{c}$ ne peut plus être considéré comme petit devant 1.

4.2. Energie associée à une onde électromagnétique

La représentation corpusculaire du rayonnement électromagnétique consiste à le considérer comme constitué de photons transportant chacun un quantum d'énergie.

4.2.1. Energie d'un photon

Dans le référentiel où la source est fixe, le quantum d'énergie d'un photon est donné par la relation de Planck-Einstein :

$$E_S = \mathbf{h}\, \nu_S$$

$\mathbf{h}$ étant la constante de Planck et ν_S la fréquence de l'onde associée au photon.

Il s'agit de l'énergie « vraie » du photon.

Comment varie l'énergie d'un photon en cas de changement de référentiel ?

Nous allons vérifier que les équations du sous-chapitre 3.2 restent valables pour les particules de masse nulle. Cette condition est en effet nécessaire pour satisfaire au principe de relativité en cas d'interaction des photons avec la matière.

Considérons le cas d'une particule initialement au repos dans Σ, d'énergie E_0, ayant absorbé un photon d'énergie E_S émis dans le même référentiel :

- son énergie est : $E = E_0 + E_S$;
- sa quantité de mouvement est égale à l'impulsion du photon absorbé:
  $E\, v/\mathbf{c}^2 = \varepsilon\, E_S/\mathbf{c}$ avec : $\varepsilon = \pm 1$ selon que le photon a pour vitesse $\pm\, \mathbf{c}$;
- sa vitesse est donc telle que : $v/\mathbf{c} = \varepsilon\, E_S/ E$.

Désignons par u la vitesse du référentiel mobile Σ' par rapport à la source. Les équations (3.9) et (3.13) donnant l'énergie E' dans Σ' en fonction de E peuvent s'écrire :

$E' = a\,(1 - u\,v/\mathbf{c}^2)\,E$ avec : $a = \Upsilon$ (dans l'hypothèse de l'invariance de la masse au repos) (4.3)

$a = \Upsilon^2$ (invariance de l'énergie totale, expérience dans Σ)

Compte tenu de l'expression de v donnée plus haut, E' s'écrit :

$$E' = a\,(1 - u\,\varepsilon\,E_S/\,E/\mathbf{c})\,E = a\,(E - \varepsilon\,u\,E_S/\mathbf{c})$$

En désignant par E'_φ l'énergie du photon dans Σ', E' peut aussi s'écrire sous la forme :

$$E' = a\,E_0 + E'_\varphi = a\,(E - E_S) + E'_\varphi$$

Par conséquent : $a\,(E - \varepsilon\,u\,E_S/\mathbf{c}) = a\,(E - E_S) + E'_\varphi$

D'où l'on tire : $E'_\varphi = a\,(1 - \varepsilon\,u/\mathbf{c})\,E_S$ (4.4)

On retrouve bien l'équation (4.3) avec $v = \varepsilon\,\mathbf{c}$.

a) <u>Si l'on se place dans le cadre de la relativité restreinte</u>, l'équation (4.4) conduit à écrire :

pour $v = \mathbf{c}$: $E'_\varphi / E_S = ((1 - u/\mathbf{c})/(1 + u/\mathbf{c}))^{1/2}$ (4.5)

pour $v = -\mathbf{c}$: $E'_\varphi / E_S = ((1 + u/\mathbf{c})/(1 - u/\mathbf{c}))^{1/2}$

On retrouve les relations de l'effet Doppler (4.2), liant fréquence apparente et fréquence propre.

Pour l'observateur du référentiel Σ', le photon a une énergie apparente $\mathbf{h}\,\nu$ correspondant à sa fréquence apparente.

b) <u>Si l'on se place dans l'hypothèse de la conservation de l'énergie totale</u>, <u>pour une expérience menée dans le référentiel Σ où la source est fixe</u> ($a = \Upsilon^2$) :

$$E'_\varphi = ((1 - \varepsilon\,u/\mathbf{c})\,(1 - u^2/\mathbf{c}^2))\,E_S = E_S/(1 + \varepsilon\,u/\mathbf{c}) \qquad (4.6)$$

pour $v = \mathbf{c}$: $E'_\varphi/E_S = 1/(1+ u/\mathbf{c})$

pour $v = -\mathbf{c}$: $E'_\varphi/E_S = 1/(1- u/\mathbf{c})$

Ces relations ne sont pas identiques aux relations (4.1) relatives aux fréquences :

pour $v = \mathbf{c}$: l'observateur s'éloigne de la source et $\nu = (1 - u/\mathbf{c})\,\nu_S$

pour $v = -\mathbf{c}$: l'observateur se rapproche de la source et $\nu = (1 + u/\mathbf{c})\,\nu_S$

L'énergie apparente du photon dans Σ' est égale à $\Upsilon^2\,\mathbf{h}\,\nu$.

c) Qu'en est-il d'une expérience menée dans le référentiel Σ' où la source est mobile ?

Le même raisonnement que précédemment conduit à la relation ci-dessous (obtenue en remplaçant u par - u dans (4.6)):

$$E_S = \Upsilon^2 (1 + \varepsilon\, u/\mathbf{c})\, E'_\varphi = E'_\varphi / (1 - \varepsilon\, u/\mathbf{c})$$

soit : $$E'_\varphi = (1 - \varepsilon\, u/\mathbf{c})\, E_S \qquad (4.8)$$

Cette relation est identique à celle donnant la fréquence apparente. Le photon a donc dans Σ' une énergie apparente égale à $\mathbf{h}\,\nu$.

Que la source soit fixe ou mobile, l'énergie du photon est donc donnée par le produit $\mathbf{h}\,\nu$ dans le référentiel de l'expérience.

4.2.2. Puissance d'une onde électromagnétique

Une onde électromagnétique peut être considérée comme un flux de photons. Mais, à l'inverse n'importe quel flux de photons constitue-t-il une onde électromagnétique ?

Nous considérons que non. La fréquence de l'onde ne définit pas seulement l'énergie des photons, mais aussi leur enchaînement dans le temps. Un photon peut donc être considéré comme un fragment d'onde électromagnétique (de fréquence ν_1), mais une succession de photons (à la fréquence $\nu_2 \neq \nu_1$) n'est qu'une succession de fragments d'onde.

Quelle conséquence en tirer pour ce qui concerne la puissance d'une onde ?

Imaginons l'expérience suivante :

Une onde monochromatique de fréquence ν transporte à travers une surface S un flux de N photons par seconde ; sa puissance est égale à : $N\,\mathbf{h}\,\nu / S$.

Le flux de photons résulte à la fois de la succession et de la superposition des photons. Si l'on garde la superposition inchangée, transformer cette onde en une onde de fréquence ν' oblige à modifier le débit de photons, qui doit passer à (ν' /ν) N photons par seconde.

La puissance devient : $(\nu'/\nu\, N)\,\mathbf{h}\,\nu'/S = (\nu'^2/\nu^2)\,(N\,\mathbf{h}\,\nu/S)$

On doit donc considérer que la puissance d'une onde électromagnétique varie comme le carré de la fréquence.

Nous verrons au chapitre suivant que les ondes électromagnétiques peuvent être déformées par un champ gravitationnel. La fréquence d'émission et la fréquence liée à l'énergie peuvent alors être différentes.

5. Gravitation

5.1. Formulation des lois de la gravitation

La théorie de la relativité générale conserve le principe d'invariance de la masse au repos. Elle retient d'autre part l'égalité entre masse gravitationnelle et masse inertielle et pose le principe d'équivalence entre gravitation et accélération.

Dans notre proposition, nous retenons l'égalité entre masse gravitationnelle et masse inertielle. En revanche nous verrons qu'on ne peut pas considérer qu'il y a équivalence complète entre gravitation et accélération.

Une première analyse basée sur les constatations expérimentales (loi newtonienne de la gravitation, décalage gravitationnel des horloges) va permettre d'établir les lois de la gravitation dans des conditions de champ gravitationnel faible et de dégager les principes que nous proposons de retenir.

5.1.1. Lois en champ gravitationnel faible

Considérons un corps massif de masse M, constituant la source gravitationnelle. Dans le référentiel (supposé galiléen) lié à ce corps, une particule[27] située à la distance r a une énergie au repos E_0 non nulle (masse au repos m_0).

Dans tout ce chapitre nous considérerons que M *est très grand devant* m_0 *de façon à pouvoir considérer* M *comme invariable et à négliger par conséquent l'influence de* m_0 *sur* M. *D'autre part, nous nous plaçons dans l'hypothèse d'un champ à symétrie sphérique.*

Nous admettons que l'action du corps massif sur la particule peut être décrite en faisant appel à un champ gravitationnel qui confère à la particule une énergie potentielle E_g. [28]

Dans tout le chapitre 5, nous supposerons que le ratio GM/c^2r ***est petit devant*** 1 **(champ faible).**[29] **Nous considérons que, dans ce cas, la loi newtonienne de la gravitation est valable à vitesse nulle.**

Equations énergétiques

Exerçons une action sur la particule au repos de façon à l'éloigner (à vitesse infinitésimale) d'une distance dr selon une direction radiale par rapport à la source.

[27] Rappelons que, dans cette note, le terme particule s'applique à tout objet physique pouvant être modélisé comme un point pour décrire son mouvement.
[28] Cette proposition est justifiée dans la note intitulée « Champ gravitationnel, Principe fondamental de la Dynamique et Mécanique quantique » exposant le modèle retenu pour le champ.
[29] G désigne la constante de gravitation universelle.

Comment varie l'énergie de la particule ?

Selon la loi newtonienne de la gravitation (G étant la constante de gravitation universelle), la force à exercer pour déplacer la particule est juste supérieure à :

$$F_x = GM\, m_0 / r^2 \tag{5.1}$$

Pour un déplacement incrémental dr, l'énergie extérieure apportée est égale au travail de la force :

$$dE_x = (GM\, m_0 / r^2)\, dr = (GM / \mathbf{c}^2 r^2)\, E_0\, dr$$

Dans la continuité de ce qui a été développé au paragraphe 3.2.2, nous étendons la remise en cause de l'invariance de la masse au repos en considérant que, si une particule est soumise à l'influence gravitationnelle d'un corps massif, son énergie au repos (dans le référentiel du corps massif) varie avec sa distance à ce corps.

Cette variation de l'énergie au repos est cohérente avec le décalage gravitationnel des horloges : des horloges restées au sol délivrent des durées plus faibles que des horloges embarquées à bord de satellites. Conformément à ce qui a été expliqué au paragraphe 3.3.1, cela peut être interprété comme lié à une augmentation de l'énergie au repos du fait de l'augmentation de l'effet gravitationnel. Alors, conformément aux résultats expérimentaux, la variation d'énergie s'exprime par :

$$dE_0 = - (GM / \mathbf{c}^2 r^2)\, E_0\, dr \tag{5.2}$$

Cette hypothèse de variation de l'énergie au repos dans le champ gravitationnel (dans un même référentiel) implique que l'effet de la gravitation ne peut pas être assimilé complètement à celui d'une accélération.

La conservation de l'énergie globale du système implique que la variation d'énergie potentielle est égale à:

$$dE_{g0} = dE_x - dE_0 = 2\, (GM / \mathbf{c}^2 r^2)\, E_0\, dr$$

Cette formulation conduit logiquement à étendre le résultat en remplaçant E_0 par E (énergie totale de la particule) lorsque la particule est en mouvement :

$$dE_g = dE_x - dE = 2\, (GM / \mathbf{c}^2 r^2)\, E\, dr \tag{5.3}$$

Ce faisant nous considérons que la gravitation est un phénomène d'échange d'énergie entre le champ gravitationnel et la particule impliquant l'énergie totale de celle-ci.

Finalement les équations énergétiques régissant le mouvement de la particule dans le champ gravitationnel s'écrivent de façon incrémentale comme suit :

$$dE_0 = - (GM / \mathbf{c}^2 r^2)\, E_0\, dr \tag{5.2}$$

$$dE = dE_x - 2\, (GM / \mathbf{c}^2 r^2)\, E\, dr \tag{5.4}$$

Ces équations ne sont pas contradictoires car, *en l'absence de forces extérieures*, la particule ne peut pas être au repos et on a nécessairement : $E \neq E_0$.

Par intégration, les équations (5.2) et (5.4) conduisent aux relations ci-dessous :[30]

- pour l'énergie au repos :

$$E_0 = E_{0\infty} \exp\left(GM/\mathbf{c}^2 r\right) \approx \left(1 + GM/\mathbf{c}^2 r\right) E_{0\infty} \qquad (5.5)$$

- pour l'énergie totale (*en l'absence de forces extérieures*) :

$$E = E_\infty \exp\left(2\,GM/\mathbf{c}^2 r\right) \approx \left(1 + 2\,GM/\mathbf{c}^2 r\right) E_\infty \qquad (5.6)$$

Potentiel gravitationnel

En choisissant $E_g = 0$ à l'infini, *en l'absence de forces extérieures*, l'énergie potentielle est:

$$E_g = E_\infty - E \approx -\left(2\,GM/\mathbf{c}^2 r\right) E_\infty \qquad (5.7)$$

En posant $m_{0\infty}$ = masse au repos hors influence de la gravitation : $E_\infty = \Upsilon_\infty\, m_{0\infty}\, \mathbf{c}^2$

Donc : $E_g \approx -2\,\Upsilon_\infty\, GM\, m_{0\infty} / r$

Pour une vitesse à l'infini nulle, le potentiel est le double de celui qui ressort de la théorie newtonienne. Ceci est lié à l'incidence de la gravitation sur la masse au repos. En cas de vitesse non nulle à l'infini, l'écart par rapport au potentiel newtonien croît avec cette vitesse.

Equation du mouvement

L'effet de la gravitation peut être considéré comme celui d'une accélération appliquée pas à pas à une masse au repos variable. L'énergie potentielle étant proportionnelle à l'énergie de la particule, le mouvement est indépendant de la masse initiale considérée si les vitesses initiales sont identiques.

L'équation fondamentale de la dynamique peut être utilisée en tenant compte du fait que la variation d'énergie associée à la variation de la quantité de mouvement (soit dE_p) ne représente pas la totalité de la variation d'énergie dE de la particule.

En effet une partie de la variation d'énergie potentielle correspond à la variation de masse au repos de la particule, soit : ΥdE_0 (masse au repos d'énergie dE_0 portée à la vitesse v).

On a donc : $dE_p = dE - \Upsilon\, dE_0$

L'effet de la gravitation sur la quantité de mouvement est assimilé à celui d'une force attractive $\vec{F}$ colinéaire à $\vec{r}$:

$$d\left(m\vec{v}\right) = \left(\vec{F} + \overrightarrow{F_x}\right) dt$$

$$\vec{v}\, d\left(m\vec{v}\right) = \vec{v}\left(\vec{F} + \overrightarrow{F_x}\right) dt = \vec{F}\,\overrightarrow{dr} + dE_x = dE_p$$

[30] L'introduction (par commodité) de fonctions exponentielles ne préjuge aucunement de l'extension des lois de la gravitation en dehors du domaine de champ faible.

Puisque : $\vec{v}\,\vec{v} = v^2$, $v^2\,dm + m\,\vec{v}\,d\vec{v} = dE_p$

Dans cette équation, m correspond à l'énergie totale de la particule ($m = E/\mathbf{c}^2$), alors que dm est à relier à la variation de la quantité de mouvement ($dm = dE_p/\mathbf{c}^2$). Par conséquent :

$$(v^2/\mathbf{c}^2)\,dE_p + (\vec{v}\,d\vec{v}\;/\;\mathbf{c}^2)\,E = dE_p \tag{5.8}$$

$\Upsilon^2 = 1/(1- v^2/\mathbf{c}^2)$ $\rightarrow$ $v^2 = \mathbf{c}^2(1\text{-}1/\,\Upsilon^2)$ et $\vec{v}\,d\vec{v} = \mathbf{c}^2\,d\Upsilon/\,\Upsilon^3$

(5.8) $\rightarrow$ $(1\text{-}1/\,\Upsilon^2)\,dE_p + (d\Upsilon/\,\Upsilon^3)\,E = dE_p$

$$-\,dE_p + (d\Upsilon/\,\Upsilon)\,E = 0$$

Donc : $$dE_p = (d\Upsilon/\,\Upsilon)\,E \tag{5.9}$$

Il en résulte que Υ est solution de l'équation :

$$d\Upsilon/\,\Upsilon = dE/E - \Upsilon\,dE_0/E$$

Il est facile de voir que le choix $\Upsilon = E/E_0$ convient. Cela montre la cohérence de l'hypothèse de variation de l'énergie au repos avec le concept d'énergie totale.

L'équation ci-dessus s'écrit alors :

$$d\Upsilon/\,\Upsilon = dE/E - dE_0/E_0$$

qui correspond à la dérivation de l'équation $\Upsilon = E/E_0$.

Finalement : $Fdr = dE - \Upsilon\,dE_0 - dE_x = (dE - dE_x) - (dE_0/E_0)\,E$

$$\approx -2\,(GM/\,\mathbf{c}^2r^2)\,E\,dr + (GM/\,\mathbf{c}^2r^2)\,E\,dr$$

$$F \approx -\,GM\,E/\,\mathbf{c}^2r^2 = -\,\Upsilon\,GM\,E_0/\,\mathbf{c}^2r^2 \tag{5.10}$$

Pour $\Upsilon = 1$ on retrouve bien l'expression newtonienne.

Puisque $\Upsilon = E/E_0$, on déduit des équations 5.5 et 5.6 (*en l'absence de forces extérieures*):

$$\Upsilon = \Upsilon_\infty \exp\,(GM/\,\mathbf{c}^2r) \approx \Upsilon_\infty\,(1 + GM/\,\mathbf{c}^2r) \tag{5.11}$$

Partage de la variation d'énergie potentielle

Il est facile de vérifier que :

$$\Upsilon\,dE_0 = d\Upsilon\,E_0 \qquad [= -\Upsilon_\infty\,(GM/\,\mathbf{c}^2r^2)\,\exp\,(GM/\,\mathbf{c}^2r)\,E_0\,dr]$$

Par conséquent, l'énergie échangée avec le champ gravitationnel est partagée à parts égales entre l'effet d'accélération et l'effet de modification de l'énergie au repos.

Nous allons retenir la conclusion ci-dessus comme principe et montrer qu'on en déduit les équations (5.1) et (5.2).

5.1.2. Principes retenus

Compte tenu de l'analyse précédente, nous retenons les principes suivants pour établir les lois de la gravitation pour une particule de masse non nulle en champ faible :

Premier principe : champ gravitationnel et énergie potentielle

La gravitation créée par une source gravitationnelle peut être caractérisée par un champ gravitationnel conférant une énergie potentielle aux particules qui y sont présentes.

La variation de l'énergie potentielle d'une particule, de masse nulle ou non nulle, est proportionnelle à l'énergie totale E de celle-ci, calculée dans le référentiel lié à la source ; elle est donnée par la relation :

$$\mathrm{dE_g} = 2\ (\mathrm{GM}/\ \mathbf{c}^2\mathrm{r}^2)\ \mathrm{E\ dr}$$

Deuxième principe : conservation de l'énergie

La variation d'énergie totale d'une particule est égale à l'opposé de la variation d'énergie potentielle majorée du travail des forces extérieures s'il y a lieu :

$$\mathrm{dE} = \mathrm{dE_x} - \mathrm{dE_g}$$

Troisième principe : influence de la gravitation sur l'énergie et la quantité de mouvement d'une particule

L'énergie au repos d'une particule de masse non nulle varie avec sa distance à la source.

En l'absence de forces extérieures, la variation d'énergie associée à l'énergie au repos et la variation d'énergie associée à la quantité de mouvement sont chacune égale et opposée à la moitié de la variation de l'énergie potentielle.

Quatrième principe : équivalence (partielle) entre gravitation et accélération

La loi fondamentale de la dynamique est applicable pour déterminer la relation entre la variation de la quantité de mouvement de la particule et la variation d'énergie associée à cette impulsion sous l'effet du champ gravitationnel.

Application des principes

Plaçons-nous en l'absence de forces extérieures :

1er + 2ème principe : $\mathrm{dE} = -\mathrm{dE_g} = -2\ (\mathrm{GM}/\ \mathbf{c}^2\mathrm{r}^2)\ \mathrm{E\ dr}$

3ème principe : $\Upsilon\ \mathrm{dE_0} = \mathrm{dE}/2$

4ème principe : $\mathrm{E} = \Upsilon\ \mathrm{E_0}$ (cf. ***Equation du mouvement*** au paragraphe 5.1.1)

Il en découle immédiatement :

$$dE = 2\,\Upsilon\, dE_0 = -2\,(GM/\,\mathbf{c}^2r^2)\,\Upsilon\, E_0\, dr$$

$$dE_0 = -\,(GM/\,\mathbf{c}^2r^2)\, E_0\, dr \qquad \text{(soit l'équation 5.2)}$$

En se reportant à l'***équation du mouvement***, on voit que :

$$dE_p = dE - \Upsilon\, dE_0 = F\, dr$$

Donc : $F\, dr = -\,(GM/\,\mathbf{c}^2r^2)\, E\, dr$

Si F_x désigne l'opposé de la force attractive gravitationnelle et si la vitesse est nulle :

$$F_x = GM\, E_0/\,\mathbf{c}^2r^2 = GM\, m_0\,/r^2 \qquad \text{(soit l'équation 5.1)}$$

5.1.3. Cas des photons. Décalage spectral gravitationnel

L'équation (5.4) portant sur l'énergie totale permet d'expliquer, lorsqu'on l'applique aux photons :

- la déviation des rayons lumineux par une source gravitationnelle (cf. sous-chapitre 5.3) ;
- le décalage spectral gravitationnel (cf. sous-chapitre 5.4 : expérience de Pound et Rebka).

Au paragraphe 4.2.2 nous avons vu que la fréquence d'une onde électromagnétique représentait à la fois la fréquence d'émission des photons et la fréquence liée à leur énergie par la relation de Planck-Einstein.

Conformément à cette relation, la fréquence liée à l'énergie suit la même loi que l'énergie totale :

$$d\nu = -\,2\, GM/\,\mathbf{c}^2r^2\, \nu\, dr \qquad (5.12)$$

Dans un champ gravitationnel, la fréquence liée à l'énergie d'un photon varie ; elle est donnée par :

$$\nu_g = \nu_\infty \exp\,(2\, GM/\,\mathbf{c}^2r) \approx (1 + 2\, GM/\,\mathbf{c}^2r)\, \nu_\infty \qquad (5.12')$$

En revanche, la fréquence ν_0 d'émission de l'onde (qui définit la succession des photons) est nécessairement invariante ($= \nu_\infty$), sinon il se produirait une accumulation de photons.

La fréquence liée à l'énergie et la fréquence d'émission deviennent donc distinctes.

L'équation (5.5) portant sur l'énergie au repos disparaît puisque le photon a une masse au repos nulle.

Mais, concomitamment au décalage spectral, la vitesse de propagation c_g d'un photon est modifiée dans la traversée du champ gravitationnel.[31]

[31] Cela permet d'expliquer l'effet Shapiro (Influence d'un champ gravitationnel sur la durée de transmission d'un signal électromagnétique) (cf. § 5.5).

En effet, dans un champ gravitationnel, la longueur d'onde λ_g d'une onde électromagnétique s'exprime par la double relation :

$$\lambda_g = \mathbf{c} / \nu_g = c_g / \nu_0$$

Le premier terme de cette relation correspond au calcul « énergétique » de la longueur d'onde :

$$\mathbf{c} / \nu_g = h/p$$

puisque : E (énergie) = $\mathbf{h}\, \nu_g$ et p (impulsion) = E /$\mathbf{c}$ [32]

Le second terme correspond au calcul cinématique (célérité divisée par la fréquence d'émission).

Les produits $c_g\, \nu_g$ et $\lambda_g\, \nu_g$ **sont invariants dans la traversée du champ**.[33]

La vitesse de l'onde (et du photon) vaut :

$$c_g = \exp(-2\, GM/ \mathbf{c}^2 r) \approx (1 - (2\, GM/ \mathbf{c}^2 r))\, \mathbf{c} \qquad (5.13)$$

Ce qui précède conduit à compléter les principes exposés précédemment en écrivant que, lorsque des particules se déplacent dans un champ gravitationnel, l'action de la gravitation consiste en :

- une modification de l'énergie totale des particules, qu'elles soient ou non de masse nulle ;
- une modification de la quantité de mouvement des particules de masse non nulle ainsi que de leur énergie au repos ;
- une modification de l'impulsion des particules de masse nulle ainsi que de leur vitesse, qui devient inférieure à c.

Comparaison avec la Relativité générale

Compte tenu de l'équation (5.12'), l'équation liant les fréquences en deux points, de distances à la source gravitationnelle r_1 et r_2, s'écrit :

$$\nu_2 = \nu_1\ (1 + 2\, GM/ \mathbf{c}^2 r_2)/ (1 + 2\, GM/ \mathbf{c}^2 r_1) \qquad (5.14)$$

Dans le cadre de la relativité générale, l'équation obtenue est :

(RG) $$\nu_2 = \nu_1\ ((1 - 2\, GM/ \mathbf{c}^2 r_1)/ (1 - 2\, GM/ \mathbf{c}^2 r_2))^{1/2}$$

soit, dans les conditions de champ faible :

(RG) $$\nu_2 = \nu_1\ ((1 + GM/ \mathbf{c}^2 r_2)/ (1 + GM/ \mathbf{c}^2 r_1)) \qquad (5.14')$$

<u>L'écart de fréquence est donc deux fois plus faible pour la relativité générale</u>.

---

[32] Nous considérons que l'impulsion reste égale à $E/\mathbf{c}$ bien que la vitesse de l'onde ne soit plus égale à $\mathbf{c}$.

[33] On peut également expliquer ce résultat de la façon suivante : comme mentionné au paragraphe 4.2.2, si la vitesse de l'onde restait égale à c, sa puissance varierait comme le carré de sa fréquence ; cela impliquerait, qu'au fur et à mesure de la progression de l'onde vers la source gravitationnelle, le nombre de photons écoulé par unité de temps augmenterait, ce qui ne peut pas être le cas.

Considérons maintenant une source de photons située la distance r_1, émettant des photons de fréquence ν_{S1}. La même source de photons située à la distance r_2 émettrait des photons de fréquence ν_{S2}, donnée par l'équation :

$$\nu_{S2} = \nu_{S1}\ (1 + GM/ c^2 r_2)/ (1 + GM/ c^2 r_1) \tag{5.15}$$

En effet l'énergie des sources, et donc celle des photons émis, est décalée conformément à l'équation (5.5) portant sur les énergies au repos.

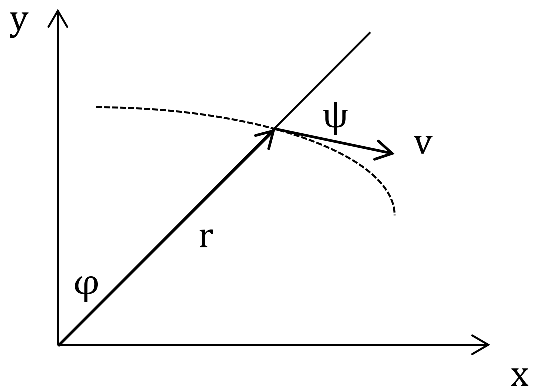
L'équation donnant la fréquence ν_2 en r_2 du photon émis en r_1 en fonction de la fréquence ν_{S2} s'écrit:

$$\nu_2 = \nu_{S2}\ (1 + GM/ c^2 r_2)/ (1 + GM/ c^2 r_1)$$

On constate que cette équation est identique à l'équation (5.14') donnée par la Relativité générale (qui admet $\nu_{S2} = \nu_{S1}$).

Ce raisonnement sera utilisé pour expliquer le résultat de l'expérience de Pound et Rebka (cf. § 5.4.)

5.1.4. Cas de l'action du seul champ de gravitation. Théorème des moments cinétiques



Considérons un mouvement plan, ce qui est le cas notamment des orbites des planètes. Si la particule n'est soumise à aucune force autre que la force centripète liée au champ de gravitation, on peut résoudre le problème en utilisant le théorème des moments cinétiques.

Désignons par $\vec{p} = m\,\vec{v}$ la quantité de mouvement. D'après la loi fondamentale de la dynamique $d\,\vec{p}$ et $\vec{r}$ sont colinéaires. D'autre part, $\vec{v}$ et $d\vec{r}$ sont également colinéaires (puisque : $\vec{v} = d\vec{r}/dt$).

Par conséquent : $d\,(\vec{p} \wedge \vec{r}\,) = d\,\vec{p} \wedge \vec{r} + \vec{p} \wedge d\vec{r} = 0$

d'où il résulte : $m\,v\,r \sin(\vec{v}, \vec{r}) = \text{Constante}$ (5.16)

Les équations (5.2) et (5.4) donnent v en fonction de r et l'équation (5.16) donne l'angle Ψ de $\vec{v}$ et de $\vec{r}$.

Ce résultat est appliqué ci-après à la détermination de l'avance du périhélie de Mercure.

On peut l'appliquer également au calcul de la courbure des rayons lumineux dans un champ gravitationnel dès lors que l'on suppose que la variation d'impulsion du photon est dirigée vers la source du champ (cf. § 5.3).

5.2. Calcul de l'avance du périhélie de Mercure

5.2.1. Les cordonnées polaires de la planète dans un référentiel lié au soleil sont (r, φ).

Les vitesses radiale et angulaire sont :

$$dr/dt = v \cos\psi \qquad d\varphi/dt = (v/r)\sin\psi$$

(5.16) → $$\Upsilon\, m_0\, v\, r \sin\psi = A \text{ (constante)} \qquad (5.16')$$

Partant de $\varphi = 0$ quand la planète est à son périhélie on cherche la valeur de φ quand elle atteint l'aphélie. Les relations ci-dessus permettent d'écrire :

$$\varphi = \int (d\varphi/dt)\, dt = A \int dt/(\Upsilon\, m_0 r^2) = A \int (dr/(\Upsilon\, m_0 r^2))(dt/dr) = A \int (dr/(\Upsilon\, m_0 r^2))/\,(v \cos\psi)$$

$$(v \sin\psi)^2 = (A/(\Upsilon\, m_0 r))^2 \quad \rightarrow \quad v\cos\psi = (v^2 - (A/(\Upsilon\, m_0 r))^2)^{1/2}$$

Et finalement : $$\varphi = A \int (dr/r^2)/\,((\Upsilon\, m_0 v)^2 - (A/r)^2)^{1/2}$$

$$\varphi = -\int d(1/r/)/((\Upsilon\, m_0 v/A)^2 - (1/r)^2)^{1/2} \qquad (5.17)$$

5.2.2. L'équation (5.11) s'écrit aussi:

$$\ln \Upsilon = GM/\,\mathbf{c}^2 r + \text{constante} \qquad (5.18)$$

*Pour Mercure le ratio v/**c** varie de 1,3 10^{-4} à 2 10^{-4} entre l'aphélie et le périhélie. Nous allons poursuivre le calcul à partir de développements limités d'ordre 2 en v/**c** :*

$$\Upsilon = 1 + (v/\mathbf{c})^2/2 + 3\,(v/\mathbf{c})^4/8$$

$$\ln \Upsilon = (v/\mathbf{c})^2/2 + (v/\mathbf{c})^4/4$$

(5.18) → $$v^2 + v^4/2\mathbf{c}^2 = \; = 2\,GM/\,r + B \text{ (constante)} \qquad (5.19)$$

Posons : $$X = 2\,GM/\,r + B$$

Réécrivons l'équation (5.17) avec ce changement de variable en nous limitant à l'ordre 2 en X

[car le ratio $(X^2/\mathbf{c}^2)/X$ est du même ordre que $(v/\mathbf{c})^2$] :

(5.19) → $$v^2 = X - X^2/2\,\mathbf{c}^2$$

$$\Upsilon^2 v^2 = v^2 + v^4/\mathbf{c}^2 = X + X^2/2\mathbf{c}^2$$

D'autre part, l'équation (5.5) donne :

$$E_0 = E_{0\infty} \exp(GM/\,\mathbf{c}^2 r)$$

soit : $m_0 = m_\infty (1 + GM/ \mathbf{c}^2 r) = m_\infty (1 + (X - B)/2\mathbf{c}^2)$

[on se limite au terme en X compte tenu de la multiplication par $\Upsilon^2 v^2$ à opérer ensuite]

$$m_0^2 = m_\infty^2 (K + X / \mathbf{c}^2)$$

$$m_0^2 \Upsilon^2 v^2 = m_\infty^2 (K + X / \mathbf{c}^2) (X + X^2/2\mathbf{c}^2) = m_\infty^2 (K X + 3X^2/2\mathbf{c}^2)$$

$$(\Upsilon m_0 v/A)^2 - (1/r)^2 = (m_\infty/A)^2 (K X + 3X^2/2\mathbf{c}^2) - (X-B)^2/(2GM)^2 \qquad (5.20)$$

La constante A peut être calculée à partir de la distance au soleil et de la vitesse au périhélie ou à l'aphélie car, le vecteur-vitesse étant alors perpendiculaire au rayon vecteur, on a :

$$\psi = \pi/2 \quad \text{donc} \quad \sin\psi = 1 \quad \text{et} \quad A = \Upsilon_i m_i v_i r_i$$

$$m_\infty/A = m_\infty/(\Upsilon_i m_i v_i r_i) \approx 1/(v_i r_i)$$

Le second membre de (5.20) peut se met sous la forme d'un polynôme de second degré en X :

$$(\Upsilon m_0 v/A)^2 - (1/r)^2 = -(1/(2GM)^2 - 3/(2\mathbf{c}^2 v_i^2 r_i^2))X^2 + P X + Q$$

Il existe deux constantes C et D telles, qu'avec le changement de variable Y = X - C, on puisse écrire :

$$(\Upsilon m_0 v/A)^2 - (1/r)^2 = (1/(2GM)^2 - 3/(2\mathbf{c}^2 v_i^2 r_i^2))(D^2 - Y^2)$$

$$= (1/(2GM)^2)(1 - 6 (GM)^2/(\mathbf{c}^2 v_i^2 r_i^2))(D^2 - Y^2)$$

Par ailleurs : $1/r = (X - B)/2GM \rightarrow \quad d(1/r) = dX/2GM = dY/2GM$

Compte tenu des deux expressions ci-dessus, l'équation (5.17) devient :

$$\varphi = -\int dY/(1 - 6 (GM)^2/(\mathbf{c}^2 v_i^2 r_i^2))^{1/2}/(D^2 - Y^2)^{1/2}$$

$6 (GM)^2/(\mathbf{c}^2 v_i^2 r_i^2)$ est très petit devant 1, ce qui permet finalement d'écrire :

$$\varphi = -(1 + 3 (GM)^2/(\mathbf{c}^2 v_i^2 r_i^2)) \int dY/(D^2 - Y^2)^{1/2}$$

Donc : $$\varphi = -(1 + 3 (GM)^2/(\mathbf{c}^2 v_i^2 r_i^2)) \arcsin (Y/D) + \text{Constante} \qquad (5.21)$$

5.2.3. Nous avons vu que le passage au périhélie et à l'aphélie est caractérisé par : $\Upsilon_i m_i v_i r_i = A$,

donc : $(\Upsilon_i m_i v_i/A)^2 - (1/r_i)^2 = 0$

Il en résulte : $D^2 - Y^2 = 0$, soit : $\begin{cases} Y/D = 1 \text{ au périhélie} \\ Y/D = -1 \text{ à l'aphélie} \end{cases}$

La variation de φ entre le périhélie et l'aphélie est donc égale à:

$$\varphi_a - \varphi_p = -(1 + 3 (GM)^2/(\mathbf{c}^2 v_i^2 r_i^2)) (\arcsin(-1) - \arcsin(1)) = (1 + 3 (GM)^2/(\mathbf{c}^2 v_i^2 r_i^2))\, \pi$$

Pour une révolution, le décalage vaut (avec v_i et r_i au périhélie ou à l'aphélie):

$$\Delta\varphi = 6\pi (GM)^2/(\mathbf{c}^2 v_i^2 r_i^2) \qquad (5.22)$$

<u>Cette formule est équivalente à celle donnée par la Relativité générale</u> (a = demi grand-axe, e = excentricité) :

(RG) $$\Delta\varphi = 6\,\pi\, GM/\, \mathbf{c}^2 a(1- e^2) \qquad (5.23)$$

<u>Application à Mercure</u>

$GM = 132\ 712\ 440\ 018\ \text{km}^3\ \text{s}^{-2}$

$\mathbf{c} = 299\ 792\ \text{km s}^{-1}$

$v_i = 58{,}98\ \text{km s}^{-1}$ (périhélie)

$r_i = 46\ 10^6\ \text{km}$ (périhélie)

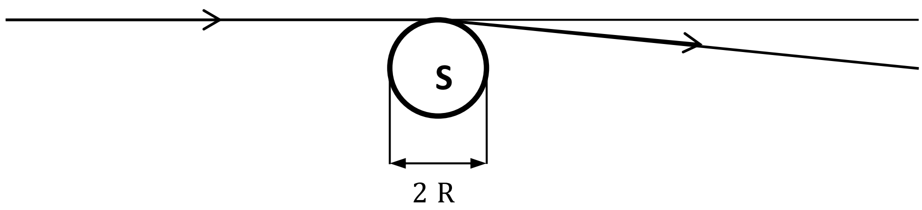
$\Delta\varphi = 5{,}018\ 10^{-7}$ radians

$= 0{,}1035$ secondes

Pour un siècle (415 révolutions) :

$\boxed{\Delta\varphi = 42{,}95 \text{ secondes d'arc}}$

5.3. Courbure des rayons lumineux



Considérons le trajet d'un photon au voisinage du soleil, représenté sur la figure ci-dessus.

En remplaçant la quantité de mouvement $\Upsilon m_0\, v$ par $E/\mathbf{c}$ pour le photon, l'équation (5.17) s'écrit :

$$\varphi = - \int d(1/r/)/((E/A\mathbf{c})^2 - (1/r)^2)^{1/2} \qquad (5.24)$$

Nous rappelons que ceci suppose que l'énergie du photon est affectée par le champ de gravitation de la même façon que l'énergie totale d'une particule massive.

On vérifie que $GM/\mathbf{c}^2 r$ *est petit devant* 1 *(égal à* $2{,}12\ 10^{-6}$ *pour* $r = R$*).*

L'équation (5.6) est donc valide :

$$E = E_\infty \exp\, (2\, GM/\, \mathbf{c}^2 r)$$

D'après (5.16') : $E/A\mathbf{c} = 1/\, r \sin\psi$

Pour $r = R$ (rayon du soleil), $\Psi = \pi/2$, $\sin\Psi = 1$

Donc : $$E_R/A\mathbf{c} = E_\infty \exp\, (2\, GM/\, \mathbf{c}^2 R) = 1/\, R$$

$$E_\infty/A\mathbf{c} = (1/R) \exp\, (-2\, GM/\, \mathbf{c}^2 R)$$

$$E/A\mathbf{c} = (1/R)\exp(2\,GM\,(1/r - 1/R)/\,\mathbf{c}^2) = (1/R)\,(1 + 2\,GM\,(1/r - 1/R\,)/\,\mathbf{c}^2)$$

(5.24) → $$\varphi = -\int d(1/r/)/((1/R)^2(1 + 4\,GM\,(1/r - 1/R\,)/\,\mathbf{c}^2) - (1/r)^2)^{1/2}$$

$$\varphi = -\int d(1/r/)/((1/R)^2(1 - 2\,GM/\,\mathbf{c}^2R)^2 - (1/r - 2\,GM/\,\mathbf{c}^2R^2)^2)^{1/2}$$

$$\varphi = -\int d(1/r/)/((\,1/R - 2\,GM/\,\mathbf{c}^2R^2)^2 - (1/r - 2\,GM/\,\mathbf{c}^2R^2)^2)^{1/2}$$

En intégrant par rapport à $(1/r - 2\,GM/\,\mathbf{c}^2R^2)$, il vient :

$$\varphi = \arcsin((1/r - 2\,GM/\,\mathbf{c}^2R^2)/\,(1/R - 2\,GM/\,\mathbf{c}^2R^2)) + \text{Constante.}$$

Pour r variant de $+\infty$ à R la variation de φ est :

$$\varphi_R - \varphi_\infty = \arcsin 1 - \arcsin(-\,2\,GM/\,\mathbf{c}^2R)$$

$$= \pi/2 + 2\,GM/\,\mathbf{c}^2R$$

Au point le plus proche du centre du soleil, l'angle de déviation de la trajectoire vaut $(2\,GM/\,\mathbf{c}^2R)$; il faut le doubler pour obtenir la déviation totale :

$$\Delta\varphi = 4\,GM/\,\mathbf{c}^2R \qquad (5.25)$$

<u>On retrouve bien la valeur fournie par la théorie de la Relativité générale</u> et vérifiée par l'expérience :

$$\boxed{\Delta\varphi = 1{,}75 \text{ secondes d'arc}}$$

5.4. Expérience de Pound et Rebka (effet spectral gravitationnel)

Rappel : *on est dans le cas où* $GM/\,\mathbf{c}^2r$ *est petit devant 1.*

Nous allons montrer que la relation (5.14), donnant le décalage spectral gravitationnel, reste compatible avec les résultats de l'expérience de Pound et Rebka si l'on interprète cette expérience dans le cadre de la nouvelle approche que nous proposons.

Rappelons le principe de cette expérience, qui vise à détecter l'effet de la gravité terrestre sur des photons :

Deux échantillons de fer ^{57}Fe (émetteur de photons gamma) sont placés dans une tour à une distance verticale suffisante pour créer un effet gravitationnel détectable (22,5 mètres). Par désexcitation, l'échantillon source émet des photons dans une bande d'énergie très étroite ; ces photons sont absorbés par l'autre échantillon si leur fréquence est restée très proche de leur fréquence d'émission (excitation à la fréquence de résonance).

En raison de l'effet Mössbauer, l'émission ou l'absorption d'un photon perturbe suffisamment peu la variation de fréquence de ce photon due à l'effet gravitationnel, pour que celle-ci reste détectable de la façon suivante : par la mise en mouvement de l'émetteur, on crée un effet Doppler qui contrebalance la variation de fréquence gravitationnelle de façon à permettre l'absorption effective des photons. Il suffit alors de mesurer le décalage fréquentiel Doppler.

Considérons le cas de l'émetteur placé au sol. Désignons par :

ν_S la fréquence des photons émis,

ν_h la fréquence de résonance en haut de la tour (de hauteur h)

ν_S' la fréquence des photons arrivant sur le récepteur,

v la vitesse relative entre émetteur et récepteur.

En raison de la faiblesse de la vitesse relative, on néglige les facteurs de variation d'énergie liés au paramètre ϒ (d'ordre $v^2/\mathbf{c}^2$ alors que l'effet Doppler est d'ordre $v/\mathbf{c}$).

Puisque le récepteur est décalé de la hauteur h par rapport à l'émetteur, l'énergie des atomes des deux appareils est décalée conformément à l'équation (5.5) portant sur les énergies au repos ; il en est de même pour l'énergie et donc la fréquence des photons émis et résonants. On doit donc utiliser l'équation (5.15) :

$$\nu_2 = \nu_1 \ (1 + GM/\mathbf{c}^2 r_2)/(1 + GM/\mathbf{c}^2 r_1) \qquad (5.26)$$

qui s'écrit encore : $\nu_2 = \nu_1 \ (1 + (GM/\mathbf{c}^2)(1/r_2 - 1/r_1))$

Dans le cas présent: $r_2 = r_1 + h$, donc : $1/r_2 - 1/r_1 = -h/r_1(r_1 + h) \approx -h/r_1^2$

Entre les fréquences des photons émis et résonnants, on a donc la relation :

$$\nu_h = \nu_S\,(1 - GM\,h/\mathbf{c}^2 r_1^2)$$

Hors effet Doppler, le décalage fréquentiel du photon émis est lui donné par l'équation (5.14), qui, avec le même raisonnement que précédemment conduit à :

$$\nu_S' = \nu_S\,(1 - 2GM\,h/\mathbf{c}^2 r_1^2)$$

Donc: $\nu_S'/\nu_h = (1 - GM\,h/\mathbf{c}^2 r_1^2)$

La compensation Doppler doit être telle que :

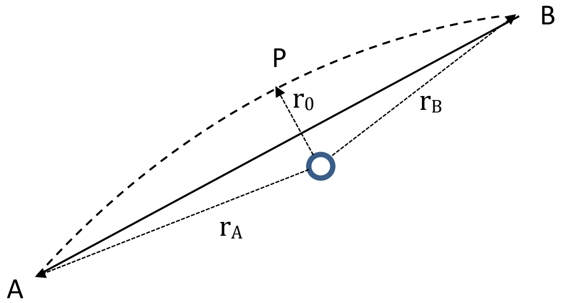
$$(1+v/\mathbf{c})\,\nu_S'/\nu_h = 1$$

ce qui conduit à : $v/\mathbf{c} = GM\,h/\mathbf{c}^2 r_1^2$

$v = g\,h/\mathbf{c}$ ce qui est bien le résultat de l'expérience.

5.5. Effet Shapiro

Intéressons-nous à la durée du parcours d'un signal électromagnétique entre deux points A et B, selon que ce parcours est influencé ou non par la présence d'un champ gravitationnel.



Désignons par :

- r_A : la coordonnée radiale de A,
- r_B : la coordonnée radiale de B,
- r_0 : la coordonnée radiale au point P de la trajectoire le plus proche de la source du champ gravitationnel.

Nous supposons que $GM/\mathbf{c}^2r$ *est petit devant* 1 *pour toute valeur de r.*

Nous avons vu (cf. § 5.1.3) que la vitesse d'une onde électromagnétique est modifiée par la présence du champ gravitationnel. Sa vitesse est donnée par l'équation (5.13) :

$$c_g = (1 - (2\,GM/\,\mathbf{c}^2r))\,\mathbf{c}$$

On peut écrire: $c_g = \mathbf{c}\,(1 - \Delta\mathbf{c}/\mathbf{c})$

avec : $\Delta\mathbf{c}/\mathbf{c} = (2\,GM/\mathbf{c}^2r)$ (5.27)

Pour calculer le temps de parcours, reprenons les éléments donnés au début du paragraphe 5.2.1.

$$dr/dt = c_g \cos\psi \quad \rightarrow \quad t = \int (1\,/c_g)\; dr/\cos\psi \qquad (5.28)$$

$$t = (1/\mathbf{c})\int (1 + \Delta\mathbf{c}/\mathbf{c})\; dr/\cos\Psi \qquad (5.28')$$

Le temps de parcours apparaît composé de deux termes :

- le premier [$t = (1/\mathbf{c})\int dr/\cos\Psi$] correspondant au temps de parcours à la vitesse $\mathbf{c}$;
- le second [$\Delta t' = (1/\mathbf{c})\int(\Delta\mathbf{c}/\mathbf{c})\; dr/\cos\Psi$] représentant le supplément de temps dû à la diminution de la vitesse de la lumière.

Terme correspondant à la variation de distance :

Puisque la gravitation courbe la trajectoire des rayons lumineux, on s'attend à ce que le temps de parcours entre deux points augmente par rapport à ce qu'il serait en l'absence de champ gravitationnel (parcours en ligne droite).

Si l'on se reporte au début du sous-chapitre 5.3, on voit que les équations (5.6) et (5.16') permettent d'exprimer $\sin\Psi$ sous la forme :

$$\sin\Psi = (r_0/r)\exp(2\,GM\,(1/r_0 - 1/r)/\mathbf{c}^2$$

Posons: $K = 2\,GM/\mathbf{c}^2 r_0$ et $X = r_0/r$

$$\sin\Psi = X\,(1 + K\,(1 - X))$$

$$\cos\Psi = (1 - X^2)^{1/2}\,(1 - 2\,K\,X^2/(1 + X))$$

$$1/\cos\Psi = (1 - X^2)^{-1/2}\,(1 + K\,X^2/(1 + X))$$

Puisque: $dr = (-r_0/X^2)\,dX$

$$[t = (1/\mathbf{c})\int dr/\cos\Psi\,] \quad\rightarrow\quad t = (1/\mathbf{c})\int(1 - X^2)^{-1/2}\,dr \;-\; (K\,r_0/\mathbf{c})\int(1 - X^2)^{-1/2}/(1 + X)\;dX \qquad (5.29)$$

La durée du trajet en ligne droite à la vitesse **c** est donnée par:

$$t_0 = (1/\mathbf{c})\int r\,(r^2 - r_0^2)^{-1/2}\,dr \;=\; (1/c)\int(1 - X^2)^{-1/2}\,dr$$

et l'augmentation de durée par:

$$\Delta t = -\,(K\,r_0/\mathbf{c})\int(1 - X^2)^{-1/2}/(1 + X)\,dX$$

En faisant le changement de variable $X = 1/\mathrm{ch}\,Y$, on obtient :

$$\Delta t = 2\,GM/\mathbf{c}^3\int d\,Y\,/\,(1 + \mathrm{ch}\,Y)$$

En intégrant, il vient : $\Delta t = (2\,GM/\mathbf{c}^3)\,(\mathrm{ch}\,Y - 1)/\,\mathrm{sh}\,Y$

soit: $\Delta t = (2\,GM/\mathbf{c}^3)\,(e^Y - 1)/(e^Y + 1)$ (5.30)

De A à B la variation de durée est la somme des variations de A à P et de B à P.

Si r_A et r_B *sont suffisamment grands devant r_0,* nous pouvons considérer qu'aux points A et B : $(e^Y - 1)/(e^Y + 1) \approx 1$

Au point P, on a : $\mathrm{ch}\,Y = 1$, $Y = 0$ et $(e^Y - 1)/(e^Y + 1) = 0$

Finalement : $\Delta t_{AB} = 4\,GM/\mathbf{c}^3$ (5.31)

Terme correspondant à la variation de vitesse:

En se reportant aux équations (5.28') et (5. 29) on voit que l'on peut écrire :

$$\Delta t' = (1/c)\int(1 - X^2)^{-1/2}\,(\Delta\mathbf{c}/\mathbf{c})\,dr$$

(5.27) → $\Delta t' = -(2GM/\mathbf{c}^3)\int(1 - X^2)^{-1/2}X^{-1}dX$ (on néglige les termes d'ordre inférieur)

En posant $X = 1/\mathrm{ch}\,Y$, l'équation ci-dessus se réduit à :

$$\Delta t' = (2GM/\mathbf{c}^3)\int dY$$

En intégrant : $\Delta t' = (2GM/\mathbf{c}^3) \arg \mathrm{ch}(r/r_0)$ (5.32)

Si r_A et r_B sont suffisamment grands devant r_0, on a : $\arg \mathrm{ch}(r_A/r_0) \approx \ln(2r_A/r_0)$

$\arg \mathrm{ch}(r_B/r_0) \approx \ln(2r_B/r_0)$

Puisque $\arg \mathrm{ch}(1) = 0$: $\Delta t'_{AB} = (2GM/\mathbf{c}^3) \ln(4r_A r_B/r_0^2)$ (5.33)

Finalement, en sommant les équations (5.31) et (5.33), on obtient l'effet Shapiro complet (pour un aller AB simple) :

$$\Delta T_{AB} = (2\ GM/\mathbf{c}^3)(\ln(4\ r_A r_B/r_0^2) + 2) \quad (5.34)$$

<u>Cet effet n'est pas exactement identique à celui qui est donné par la Relativité générale</u> :

(RG) $$\Delta T_{AB} = (2\ GM/\mathbf{c}^3)(\ln(4\ r_A r_B/r_0^2) + 1) \quad (5.35)$$

Le terme secondaire correspondant à la variation de distance est doublé dans (5.34) par rapport à (5.35). Il faut noter que, dans les conditions des expériences réalisées, ce terme secondaire est trop petit par rapport au terme principal pour pouvoir être mis en évidence.

Nous expliquerons cet écart au sous-chapitre 5.6 ci-après.

5.6. Comparaison avec la théorie de la relativité générale

Nous venons d'examiner les principales expériences considérées comme bases de vérification de la théorie de la relativité générale. Nous avons vu, *qu'en conditions de champ gravitationnel faible*, les prédictions de la RG et celles faites à partir de notre nouvelle approche sont identiques sauf en ce qui concerne le décalage spectral gravitationnel et le terme secondaire de l'effet Shapiro.

L'explication de cette similitude est développée ci-après.

5.6.1. <u>Métrique de Schwarzschild</u>

Dans le cadre de la relativité générale, la métrique de Schwarzschild est une solution des équations d'Einstein. Elle décrit la géométrie de l'espace-temps déformée par le champ gravitationnel à l'extérieur d'un corps isolé, à symétrie sphérique, statique (sans rotation), non chargé et entouré de vide.

Pour un corps de masse M, cette métrique est définie à l'extérieur d'une sphère de rayon :

$$R_S = 2\ GM/\mathbf{c}^2 \quad (5.37)$$

En utilisant les coordonnées sphériques ($\mathbf{c}t$, r, θ, φ), la distance infinitésimale ds liée à la métrique est donnée par la relation :

$$ds^2 = (1 - R_S/r)\,\mathbf{c}^2\,dt^2 - (1 - R_S/r)^{-1}\,dr^2 - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) \qquad (5.38)$$

Dans l'espace-temps déformé, une particule soumise à la seule action de la gravitation suit un mouvement inertiel et se déplace le long d'une géodésique :

- de genre « lumière », caractérisée par $ds^2 = 0$, pour une particule de masse nulle (photons) ;
- de genre « temps », caractérisée par $ds^2 = \mathbf{c}^2\,d\tau^2$, pour une particule de masse non nulle ($d\tau$ étant l'intervalle de temps propre).

L'étude du mouvement est basée sur la conservation, le long des géodésiques, de quantités assimilées, d'une part à l'énergie, d'autre part au moment cinétique [34] .

Trajectoire plane d'une particule matérielle (orbite d'une planète)

On choisit le référentiel tel que la trajectoire soit située dans le plan $\theta = \pi/2$:[35]

- la première quantité conservée s'apparente à l'énergie par unité de masse en dehors de l'attraction gravitationnelle (à l'infini)[36]:
$$\varepsilon = \mathbf{c}^2\,(1 - R_S/r)\,(dt/d\tau) \qquad (5.39)$$
- la seconde s'apparente au moment cinétique par unité de masse (à l'infini):
$$l = r\,(r\,d\varphi/dt)\,(dt/d\tau) = r\,v\,\sin\psi\,(dt/d\tau) \qquad (5.40)$$

Calculons $(dt/d\tau)$ à partir de l'équation (5.38) et des relations :

$$dr/dt = v\cos\psi \quad \text{et} \quad d\varphi/dt = (v/r)\sin\psi$$

(5.38) → $$d\tau^2 = ((1 - R_S/r) - (1 - R_S/r)^{-1}\,(v^2/\mathbf{c}^2)\cos^2\psi) - (v^2/\mathbf{c}^2)\sin^2\psi)\,dt^2$$

$$d\tau^2 = ((1 - R_S/r) - (v^2/\mathbf{c}^2) - (R_S/r)\,(v^2/\mathbf{c}^2)\cos^2\psi)\,dt^2$$

$$d\tau^2 = ((1 - v^2/\mathbf{c}^2) - (R_S/r)(1 + (v^2/\mathbf{c}^2)\cos^2\psi))\,dt^2$$

Avec $\Upsilon^2 = 1/(1 - v^2/\mathbf{c}^2)$:

$$d\tau^2 = (1/\Upsilon^2)(1 - \Upsilon^2\,(R_S/r)(1 + (v^2/\mathbf{c}^2)\cos^2\psi))\,dt^2$$

Et finalement : $$dt/d\tau = \Upsilon\,(1 + \Upsilon^2\,(R_S/r)(1 + (v^2/\mathbf{c}^2)\cos^2\psi)/2)$$

---

[34] Cette conservation se déduit des symétries de l'espace-temps. Voir, par exemple, le cours de Relativité générale 2013-2014 d'Eric Gourgoulhon (2ème année du master « Recherche, Astronomie et Astrophysique » de l'Observatoire de Paris et des Universités Paris 6,7 et 11), accessible sur Internet.

[35] cf. figure § 5.1.4.

[36] Rappelons que la RG considère la masse au repos comme invariante.

R_S/r est petit devant 1. Plaçons-nous aussi dans le cas non relativiste ($v/\mathbf{c}$ petit devant1) :

$$dt/d\tau \approx \Upsilon\,(1+ R_S/2r)$$

Les relations (5.39) et (5.40) s'écrivent :

$$\varepsilon = \mathbf{c}^2\,\Upsilon\,(1- R_S/2r) \qquad (5.39')$$

$$l = \Upsilon\,(1- R_S/2r)\; r\, v \sin\psi \qquad (5.40')$$

La condition de conservation de ces quantités conduit aux deux équations ci-dessous :

$$\Upsilon = \Upsilon_\infty\,(1- R_S/2r)^{-1} \qquad (5.41)$$

$$\Upsilon\,(1+ R_S/2r)\; r\, v \sin\psi = A \text{ constante} \qquad (5.42)$$

Déplacement radial d'un photon (décalage spectral gravitationnel)

La conservation de la quantité énergie le long de la géodésique « lumière » radiale suivie par le photon donne :

$$E_{photon} = (1 - 2\,GM/\,\mathbf{c}^2 r)^{-1/2}\, E_\infty \qquad (5.43)$$

Par ailleurs, avec $ds = 0$, $d\theta = 0$ et $d\varphi = 0$, l'équation (5.38) permet d'exprimer la vitesse (radiale) du photon dans le référentiel ($\mathbf{c}t$, r, θ, φ) :

$$c_g = dr/dt = (1- R_S/r)\mathbf{c}$$

Trajectoire non radiale d'un photon (déviation des rayons lumineux et effet Shapiro)

La trajectoire d'un photon reste dans un plan. Les calculs s'appuient sur les géodésiques « lumière » non radiales. On déduit des quantités conservées les composantes de la 4-impulsion du photon.

L'utilisation de la métrique conduit alors à l'équation différentielle de la trajectoire des photons dans le plan $\theta = \pi/2$.

Comme pour la trajectoire radiale, on peut déterminer la vitesse du photon à partir de (5.38) :

$$c_g^2/\mathbf{c}^2 = (1 - R_S/r)/(1 + (R_S/r)\cos^2\psi) = 1 - R_S/r - (R_S/r)\cos^2\psi$$

$$= 1 - 2\,R_S/r + (R_S/r)\sin^2\psi$$

$$c_g/\mathbf{c} = 1 - R_S/r + (R_S/r)\sin^2\psi/2 \qquad (5.44)$$

5.6.2. Explication des similitudes et différences

Différences fondamentales entre les deux approches

Il convient tout d'abord de rappeler la différence de conception suivante :

- la relativité générale traite le problème de manière cinématique. La courbure de l'espace-temps accélère ou ralentit les particules.[37] L'énergie de la source de l'action gravitationnelle définit le paramétrage de la métrique. Les variations d'énergie de la particule soumise à cette action ne sont pas explicites.
- La nouvelle approche proposée dans cette note est centrée sur l'énergie avec le principe de conservation de l'énergie totale. Un échange d'énergie réel a lieu entre la particule et le champ gravitationnel.[38] Cette approche est permise parce qu'on renonce au principe d'invariance de l'énergie au repos.

L'autre différence fondamentale tient précisément à la différence de conception de l'énergie au repos. En conditions de champ faible, l'énergie totale mise en jeu est doublée dans l'approche que nous proposons par rapport à la gravitation newtonienne.

Mouvement des particules

Les deux approches donnent des prédictions identiques pour ce qui concerne le mouvement des particules placées dans un champ gravitationnel (*en conditions de champ faible*).

Cela résulte du fait que :

- le facteur de Lorentz Υ s'exprime de la même façon : les équations (5.11) et (5.41) sont identiques ;
- la courbure de l'espace-temps[39] revient à égaler la valeur du moment cinétique d'une particule à celle que nous proposons : les équations (5.16') et (5.42) sont identiques si l'on tient compte de la loi donnant l'augmentation de l'énergie au repos dans le champ gravitationnel (5.5) ;
- pour ce qui concerne les photons, les deux approches supposent que ceux-ci subissent l'action gravitationnelle de la même façon que les particules matérielles ;
- les deux approches conduisent à la même variation de vitesse des photons dans le champ gravitationnel pour les trajectoires proches de trajectoires radiales.

[37] De la même façon qu'un simple changement de référentiel galiléen modifie la vitesse d'une particule.
[38] Cela est explicité dans la note intitulée « Champ gravitationnel, Principe fondamental de la Dynamique et Mécanique quantique »
[39] Avec la métrique de Schwarzschild.

Pour ce qui concerne l'effet Shapiro, l'écart noté au sous-chapitre 5.5 s'explique facilement à partir de l'équation (5.44) :

Cette équation fait apparaître le terme complémentaire $[+ (R_S/r) \sin^2 \psi/2]$ par rapport à l'équation (5.13) donnant la vitesse d'un photon dans le champ gravitationnel. Si l'on complète le calcul du sous-chapitre 5.5 (équation 5.27) en tenant compte du terme ci-dessus, on fait apparaître une diminution du temps de parcours égale à :

$$\Delta t'_1 = (GM/\mathbf{c}^3) \int (1 - X^2)^{-1/2} X \, dX \qquad \text{(tenant compte du fait que : } \sin\psi \approx X)$$

Soit, en intégrant: $\Delta t'_1 = -(GM/\mathbf{c}^3)(1 - X^2)^{½}$

Pour un aller AB simple: $\Delta t'_{1AB} = -2GM/\mathbf{c}^3$

Cet écart est bien celui que nous avions noté au sous-chapitre 5.5.

Décalage spectral gravitationnel

Comme cela a été exposé au paragraphe 5.1.3, le décalage spectral gravitationnel donné par la RG est deux fois plus faible que celui qui est calculé à partir de notre approche.

Cela est la conséquence directe de la différence fondamentale concernant la conception de l'énergie mentionnée en tête du présent paragraphe. La fréquence étant directement liée à l'énergie par la relation de Planck-Einstein, la vitesse n'intervient pas et la courbure ne joue pas pour corriger l'écart.

S'agissant de l'expérience de Pound et Rebka, les prédictions des deux approches sont identiques car la différence d'énergie totale est compensée par la prise en compte dans notre approche de la différence des énergies au repos entre émetteur et récepteur (conduisant à la même différence pour les fréquences).[40]

[40] Au paragraphe 4.1.3 (Effet Doppler), nous avions déjà considéré que l'énergie des photons émis par une source varie comme l'énergie de celle-ci.